

**BERECHNUNG
DER FLUSSDICHT- UND DER DICHTEVERTEILUNG
VON ATOMSTRAHLEN HINTER EINEM
SECHSPOLMAGNETEN**

1968

von

Jürgen Witte

aus

Stargard/Pommern

**BERECHNUNG
DER FLUSSDICHT- UND DER DICHTEVERTEILUNG
VON ATOMSTRAHLEN HINTER EINEM
SECHSPOLMAGNETEN**

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Jürgen Witte
aus
Stargard/Pommern

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 1968
Dekan: Universitätsprofessor Dr. H. Wegener
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. R. Fleischmann
Berichterstatter: Privatdozent Dr. G. Clausnitzer

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
0. ZUSAMMENFASSUNG	3
1. EINLEITUNG	4
2. STRAHLENOPTISCHE EIGENSCHAFTEN EINES SECHSPOLMAGNETEN	5
2.1 Monochromatischer Fall	6
2.2 Das Problem der Achromasie	10
3. BERECHNUNG DER FLUSSDICHTE- UND DER DICHTEVERTEILUNG	14
3.1 Phasenraumbetrachtung	15
3.2 Durchführung der Phasenraumintegration	18
3.2.1 Dichte im Phasenraum	18
3.2.2 Begrenzungen im Phasenraum	20
3.2.3 Transformationen im Phasenraum	23
3.2.4 Integration im Phasenraum, Rechenprogramm	25
3.3 Anschluß der berechneten Relativwerte an Meßgrößen	29
3.4 Darstellung des Verfahrens im 2-dimensionalen Phasenraum	33
3.5 Ergebnisse: Flußdichte- und Dichteverteilung über r und z	37
3.6 Fehlerdiskussion	39
3.6.1 Voraussetzungen über die Strahlquelle	39
3.6.2 Voraussetzungen über den Sechspolmagneten	41
3.6.3 Näherungen im Rechenprogramm	45
3.7 Prüfung des Verfahrens	46
4. ANWENDUNGEN	48
4.1 Optimalisierung der Besetzung	48
4.1.1 Diskussion der Abhängigkeit von den einzelnen Parametern	49
4.1.2 Besetzung im mehrparametrigen Raum	52
4.1.3 Selbsttätige Optimalisierung	55
4.2 Stopblende zur Unterdrückung der defokussierten Komponente	55
5. ANHANG	57
5.1 Ableitung der strahlenoptischen Eigenschaften	57
5.2 Berechnung der Intensitätsverteilung mit Zählverfahren	61

5.3 Rechenprogramme	62
5.4 Winkelverteilung der Strahlquellenöffnung	75
5.5 Vergleich der Rechnungen mit bisherigen Ergebnissen	76
5.5.1 Qualitative Ergebnisse an einer Quelle polarisierter Wasserstoffionen	76
5.5.2 Messungen an einer Quelle polarisierter Lithiumionen	77
5.5.3 Berechnung der Intensitätsverteilung in Spezialfällen	79
5.6 Eigene Messungen an einer Quelle polarisierter Wasserstoffionen mit einem Zinkoxid-Kristall	84
5.6.1 Impulsbetrieb	85
5.6.2 Kontinuierliche Messungen	87
5.6.3 Vergleich der Meßergebnisse mit Rechnungen	91
5.6.4 Weitere Messungen	93
5.7 Parameterabhängigkeit der Besetzung	96
5.7.1 Kurvenschardarstellung in zwei Parametern für die Stelle $z = 350 \text{ mm}$	96
5.7.2 Abhängigkeit von den einzelnen Parametern und Höhenliniendiagramme in zwei Parametern für die Stelle $z = 150 \text{ mm}$	99
5.8 Optimalisierungsbedingung	102
5.9 Literaturverzeichnis	106

O. ZUSAMMENFASSUNG

Für Atomstrahlen, die mit Hilfe eines Sechspolmagneten aufgespalten worden sind, wird die Verteilung der Flußdichte, wie sie mit einem Flächendetektor gemessen wird, sowie die Verteilung der Teilchendichte, die die Ausbeute eines Ionisierers bestimmt, berechnet.

Das Problem wird gelöst mit Phasenraumbetrachtungen. Dazu werden die wesentlichen Begrenzungen des mit Teilchen jeweils einer bestimmten Geschwindigkeit erfüllten Phasenraumes angegeben, die durch die Emittanz der Strahlquellenöffnung und die Akzeptanz des Magneten gegeben sind, sowie die Transformationen durchgeführt, die diese Begrenzungen bis an die interessierende Stelle überführen. Der Durchschnitt beider Phasenräume an dieser Stelle liefert den Beitrag der betrachteten Geschwindigkeit zur Intensität. Dieser Durchschnitt wird numerisch berechnet und über die gesamte Geschwindigkeitsverteilung aufsummiert.

Das Verfahren wird an mehreren Stellen geprüft. Einmal wird es zum Vergleich mit bereits vorliegenden Messungen herangezogen. Dann wird es auf Spezialfälle angewandt, in denen Rechnungen durchgeführt worden sind. Schließlich werden eigene Messungen, die an einer Wasserstoffatomstrahl-Apparatur mit einem ZnO-Kristall als Detektor ausgeführt wurden, mit theoretischen Berechnungen verglichen. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung.

Anhand der Rechnungen wird die Abhängigkeit der Intensität am Detektorort von den verschiedenen Parametern diskutiert, und es werden Optimalisierungsvorschläge für die Quelle polarisierter Wasserstoffionen des Erlanger Tandem-Van-de-Graaff-Beschleunigers gemacht. Eine Verminderung des Abstands der Strahlquelle vom Magneten von 150 mm auf 70 mm und eine Erhöhung des Magnetradius von 4 mm auf 5 mm sind realisierbare Änderungen, die den Ionenstrom aus dem Ionisierer 350 mm hinter dem Magneten um einen Faktor 1,5 steigern würden.

1. EINLEITUNG

Der Sechspolmagnet wurde 1951 von Friedburg¹ in die Atomstrahlphysik eingeführt, um die Intensität an der Stelle des Detektors dadurch zu erhöhen, daß statt eines Zweipolfeldes ein zylindersymmetrisches Magnetfeld ($2n$ -Pol-Feld) mit Fokussierungseigenschaften verwendet wird. Um Fokussierung zu erreichen, muß auf Atome mit konstantem magnetischem Moment eine Zentralkraft proportional r wirken, wobei r der Abstand von der Symmetrieachse ist. Diese Forderung ist in einem Sechspolmagneten, dessen Feld proportional r^2 ist, erfüllt. Es läßt sich zeigen, daß ein solcher Sechspolmagnet als Linse wirkt, man kann also von Abbildung sprechen. Die wichtigsten Eigenschaften werden im folgenden Abschnitt 2.1 referiert.

Die höchstmögliche Intensität am Ort des Detektors läßt sich erreichen, wenn die Atomstrahlquelle gerade dorthin abgebildet wird. Nun hängen aber die Brennweite sowie die Hauptebenenlage von der Geschwindigkeit des Strahls ab; den hierdurch entstehenden Abbildungsfehler nennt man in Analogie zur Optik "chromatischen Fehler". Für einen Strahl mit breiter Geschwindigkeitsverteilung (z.B. für einen thermischen Atomstrahl mit Maxwell-Verteilung) kann man daher die Strahlquelle gar nicht eindeutig auf den Detektor abbilden.

Es gibt nun zwei Wege, wie man vorgehen kann, um die Intensität am Detektor so groß wie möglich zu machen. Einmal kann man versuchen, den chromatischen Fehler zu kompensieren;

dieser Weg wird im Abschnitt 2.2 im folgenden Kapitel beschrieben. Daneben kann man aber auch die Intensitätsverteilung ganz allgemein berechnen, ohne sich auf den Abbildungsfall zu beschränken; die dabei angewandte Methode ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Das Verfahren selbst sowie seine Durchführung wird im Kapitel 3. behandelt; anhand der Ergebnisse wird im Kapitel 4. die Intensität einer Quelle polarisierter Wasserstoffionen optimalisiert.

2. STRAHLENOPTISCHE EIGENSCHAFTEN EINES SECHSPOLMAGNETEN

Die Äquipotentiallinien eines idealen Sechspolmagneten (Fig. 1) leiten sich ab von einer Potentialfunktion $F(z)$

$$= a_3 \cdot z^3 = a_3 \cdot (x + i \cdot y)^3 = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y):$$

$$(1) \quad \varphi(x, y) = a_3 \cdot (x^3 - 3xy^2),$$

ebenso die Feldlinien:

$$(2) \quad \psi(x, y) = -a_3 \cdot (y^3 - 3yx^2).$$

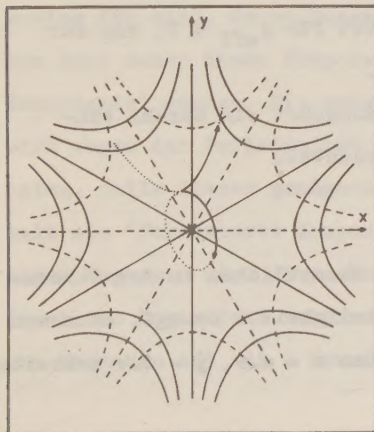


Fig. 1: Äquipotentiallinien (ausgezogen) und Feldlinien (gestrichelt) eines idealen Sechspolmagneten. Dazu sind die Projektionen senkrecht zur Strahlachse einer fokussierten Bahn (Ellipse) und einer defokussierten (Hyperbel) eingezeichnet.

Die Feldstärkekomponenten sind daher $H_x = \partial \psi / \partial x = 3 \cdot a_3 \cdot (x^2 - y^2)$ und $H_y = \partial \psi / \partial y = -6 \cdot a_3 \cdot xy$. Der Betrag der Feldstärke hängt dann nur von r ab:

$$(3) \quad H(r) = 3a_3 \cdot r^2 = H_0/R_0^2 \cdot r^2 \text{ mit } H_0 = H(R_0).$$

R_0 , der Radius der Magnetöffnung, sei konstant über die Länge l_0 des Magneten.

Friedburg¹ benutzte zur Erzeugung dieses Feldes eine Anordnung aus sechs abwechselnd gegensinnig stromdurchflossenen Drähten. In späteren Anwendungen wurde meist den eisernen Polschuhen eines Elektro-^{2,3,4,5} oder Permanentmagneten⁶ möglichst die Form der Äquipotentiallinien gegeben; häufig genügte eine Approximation an die ideale Form^{2,5,6,7,8}. Im gegebenen idealen Feld $H = H_0 \cdot r^2/R_0^2$ wirkt auf Atome mit konstantem effektivem magnetischen Moment $\mu_{\text{eff}} = -\partial E / \partial H$ die Kraft

$$(4) \quad \underline{K} = -\text{grad } E = \text{grad}(\underline{\mu} \cdot \underline{H}) = \mu_{\text{eff}} \cdot \text{grad } H \\ = \pm 2 \mu_B H_0/R_0^2 \cdot \underline{r} \text{ für } \mu_{\text{eff}} = \pm \mu_B$$

Sie ist auf die Achse hin gerichtet für $\mu_{\text{eff}} < 0$, von der Achse weg gerichtet für $\mu_{\text{eff}} > 0$.

Im folgenden Abschnitt wird nun zunächst ein Strahl einheitlicher Geschwindigkeit v betrachtet.

2.1 Monochromatischer Fall

In einem Atomstrahl, der sich im wesentlichen in der Achsenrichtung z mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, kann man die transversalen Geschwindigkeiten $\dot{x} = \alpha \cdot v$, $\dot{y} = \beta \cdot v$ schreiben,

wobei α , β die kleinen Winkel gegen die Achse sind. Dann läßt sich in der Bewegungsgleichung $\underline{K} = m \cdot d^2 \underline{r} / dt^2$ die Variable t durch die Variable z ersetzen: $t = z/v$

$$(5) \quad \underline{K} = mv^2 \cdot d^2 \underline{r} / dz^2$$

Nun ist mit $\underline{K} \sim \underline{r}$ auch $K_x \sim x$, $K_y \sim y$; infolgedessen kann man die Bewegungsgleichung für jede Komponente einzeln lösen und dann die Lösungen $x(z)$, $y(z)$ zu $r(z)$ zusammensetzen. Man erhält für $\mu_{\text{eff}} = -\mu_B$ aus $mv^2 \cdot d^2 y / dz^2 = -2 \mu_B H_0 / R_0^2 \cdot y$ mit der Abkürzung $s^2 = mv^2 / 2 \mu_B H_0 \cdot R_0^2$ die Lösungen

$$(6) \quad y(z) = A \cdot \cos z/s + B \cdot \sin z/s,$$

analog für $x(z)$. Ihre Projektionen auf die (x,y) -Ebene setzen sich zu Ellipsen zusammen (Fig. 1). Die Konstanten A und B sind durch Achsenabstand y_a und Richtung $y'_a = (dy/dz)_a$ am Anfang des Magneten gegeben: $A = y_a$, $B = s \cdot (y'_a)$.

Für $\mu_{\text{eff}} = +\mu_B$ erhält man als Lösungen

$$(7) \quad y(z) = A \cdot \cosh z/s + B \cdot \sinh z/s,$$

analog für $x(z)$, deren Zusammensetzung Hyperbeln liefert. Man kann daher diese Komponente ($\mu_{\text{eff}} > 0$) die "defokussierte Komponente" nennen. Die andere Komponente ($\mu_{\text{eff}} < 0$) dagegen wird wegen der Periodizität der Lösungen innerhalb des Magneten, falls dieser genügend lang ist, fokussiert und soll deshalb als "fokussierte Komponente" bezeichnet werden. Bei kürzerem Magneten wird diese Komponente fokussiert, nachdem die Atome das Magnetfeld verlassen haben. Der Abstand der Strahlquelle vom Magneten sei mit a bezeichnet, seine Länge mit l_0 . Ein

Atom starte in der Quellenöffnung mit dem Achsenabstand y_0 unter dem Winkel β gegen die z -Achse; der Nullpunkt der Ortskoordinate z liege von nun an am Magnetende. Betrachtet man die Bahn des Atoms für alle z , so erweist sich an der Stelle $z = a'$

$$(8) \quad a' = \frac{s \cdot \sin \lambda + a \cdot \cos \lambda}{a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda}$$

wobei $\lambda = l_0/s$ bedeutet, der Achsenabstand $y(a')$ als unabhängig vom Winkel β . An dieser Stelle tritt also Richtungsfokussierung ein, dort befindet sich das Bild der Quellenöffnung. $V = y(a')/y_0$ ist die Vergrößerung der Abbildung:

$$(9) \quad V = - \frac{1}{a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda}$$

Je nach Vorzeichen von a' und V erhält man reelle oder virtuelle Bilder, die auf dem Kopf oder aufrecht stehen können. Die Abbildung wird in Analogie zur Optik durch die Brennweite f und zwei Hauptebenen H_1, H_2 beschrieben. Man erhält für den Abstand der 1. Hauptebene vom Magnetanfang (die 2. liegt symmetrisch dazu) $h = s \cdot \tan(l_0/2s)$ und für die Brennweite $f = s/\sin(l_0/s)$. Da h stets größer als $l_0/2$ ist, liegen die Hauptebenen versetzt, H_2 liegt vor H_1 . Mit den Größen f und h läßt sich die Linsengleichung formal verifizieren: $1/b + 1/g = 1/f$, wenn man die Gegenstandsweite $g = a + h$ sowie die Bildweite $b = a' + h$ von den Hauptebenen aus rechnet.

In Fig. 2 (Kurve a) ist die Brennweite (dimensionslos als f/l_0), in Fig. 3 (Kurve a) die Hauptebenenlage (als h/l_0) über der der Geschwindigkeit v proportionalen Größe s/l_0 aufgetragen. Man spricht von "Dünnen Linsen", wenn die Hauptebenen näherungsweise zusammenfallen. Das ist hier der

Fall für $h \approx l_0/2$, also für $s/l_0 \gg 1$, d.h. für große Geschwindigkeiten oder kurze, weit offene oder schwache Magneten. In diesem Fall kann man die trigonometrischen Funktionen entwickeln: $h = s \cdot \tan(l_0/2s) \approx l_0/2$;
 $f = s/\sin(l_0/s) \approx s^2/l_0$.

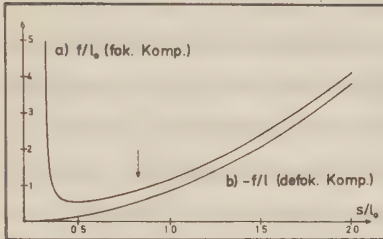


Fig. 2: reduzierte Brennweite in Abhängigkeit von der reduzierten Geschwindigkeit a) für die fokussierte Komponente, b) für die defokussierte Komponente

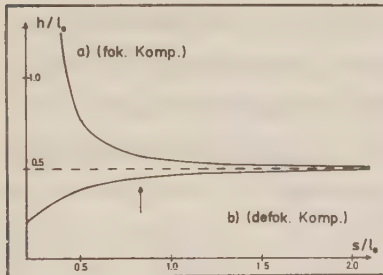


Fig. 3: Hauptebenenlage in Abhängigkeit von der reduzierten Geschwindigkeit; a) und b) wie in Fig. 2

Für die defokussierte Komponente erhält man immer virtuelle Bilder:

$$(10) \quad a' = -\frac{s \cdot \sinh \lambda + a \cdot \cosh \lambda}{a/s \cdot \sinh \lambda + \cosh \lambda} < 0$$

die aufrecht stehen:

$$(11) \quad v = \frac{1}{a/s \cdot \sinh \lambda + \cosh \lambda} > 0$$

Hier ist $h = s \cdot \tanh(l_0/2s)$ und $f = -s/\sinh(l_0/s)$. Weil h stets kleiner als $l_0/2$ ist, liegt H_1 vor H_2 .

Fig. 2 (Kurve b) stellt $-f/l_0$, Fig. 3 (Kurve b) h/l_0 dar. Auch bei der defokussierten Komponente liegt der Fall einer "Dünnen Linse" für $s/l_0 \gg 1$ vor: $h \approx l_0/2$; $f \approx -s^2/l_0$.

2.2 Das Problem der Achromasie

Achromasie liegt vor, wenn die Abbildung nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Friedburg¹ erreichte eine chromatische Korrektur durch ein zeitlich wie $1/t^2$ abfallendes Feld, mußte aber dafür einen Intensitätsverlust wegen des notwendigen Impulsbetriebs in Kauf nehmen. Wie Fig. 2 a) zeigt, weist schon ein einzelner Sechspolmagnet eine gewisse Achromasie der Brennweite auf, denn diese durchläuft im Bereich $s/l_0 \approx 1/2$ ein Minimum, ist also näherungsweise konstant. In diesem Bereich wirkt der Magnet noch als dicke Linse, die Erscheinung vergleicht sich daher mit der partiellen Achromasie einer dicken Glaslinse⁹. Allerdings ist die Lage der Hauptebenen keineswegs konstant, Achromasie ist also auch in diesem Bereich nicht vollständig erreicht.

Man kann nun versuchen, den chromatischen Fehler durch Kombination zweier Magneten zu kompensieren. Dieser Weg wurde erstmals von Lemonick, Pipkin und Hamilton¹⁰ in einer Rabi-Apparatur mit Sechspolmagneten beschritten, wo man ohnehin zwei inhomogene Magnetfelder benötigt. Allerdings erreichten die Autoren keine vollständige Achromasie, sondern nur annähernd eine solche der Brennweite: eine konvergente und eine divergente dünne Linse in kurzem Abstand lassen sich als planparallele Platte auffassen ($F = \infty$). Allgemein ist die Gesamtbrennweite eines Systems zweier

dünnere Linsen im Abstand d (dieser ist für dicke Linsen einfach von den einander zugeordneten Hauptebenen zu rechnen) $F = f_1 \cdot f_2 / (f_1 + f_2 - d)$. Durch passend gewählten Abstand d und Brennweite f_2 läßt sich erreichen, daß die Gesamtbrennweite wieder ein Minimum über der Geschwindigkeit durchläuft, wo sie also näherungsweise konstant ist, diesmal aber in einem Bereich von s/l_0 , der für das Experiment geeignet ist. Bei dem an der Quelle polarisierter Wasserstoffionen des Erlanger Tandem-Beschleunigers ("Tandem-Quelle") verwendeten Sechspolmagneten ist $l_0 = 150$ mm und für eine mittlere Strahlgeschwindigkeit $s = 125$ mm, also $s/l_0 = 0,83$. Dieser Arbeitspunkt ist in Fig. 2 und 3 mit einem Pfeil eingetragen. Fig. 4 zeigt nun, daß durch Kombination mit einem zweiten Magneten gleicher Stärke der Länge $l_2 = 100$ mm im Abstand $d = 150$ mm das Minimum der Gesamtbrennweite dem Arbeitspunkt angepaßt werden kann.

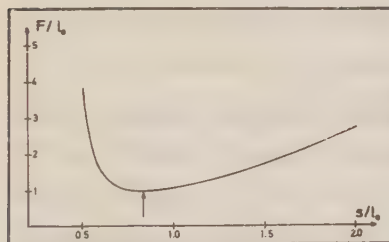


Fig. 4: Reduzierte Brennweite eines zusammengesetzten Systems in Abhängigkeit von der reduzierten Geschwindigkeit.

Die Rechnung im allgemeinen Fall fordert, daß die Gesamtbrennweite F als Funktion von s ein Minimum durchlaufen soll: $dF/ds = 0$. Das liefert für den gesuchten Abstand d :

$$(12) \quad d = \frac{f_1^2 \cdot f_2' + f_2^2 \cdot f_1'}{f_1 \cdot f_2' + f_2 \cdot f_1'}$$

in Abhängigkeit vom Verlauf der Brennweiten der einzelnen Linsen. Der oben erwähnte, von Lemonick et al. gewählte Fall entspricht $f_2 = -f_1$, was zu $d = 0$, $F = \infty$ führt. Ein anderer Spezialfall ergibt sich für $f_1 = f_2 = f$, woraus $d = f$ und $F = f$ folgt, ein aus der Optik bekannter Fall, welcher am sogenannten Ramsden'schen Okular vorliegt. Mit der angegebenen Bedingung Gl. (12) kann man nun zwar Achromasie der Brennweite näherungsweise erreichen. Es läßt sich aber zeigen¹¹, daß Achromasie der Hauptebenenlage nicht gleichzeitig erreichbar ist, außer wenn beide Linsen einzeln achromatisch sind.

Bei einer bestimmten festen Entfernung d der beiden Linsen bedeutet nämlich Achromasie der Hauptebenenlage, daß der Ausdruck $f_2/(f_1 + f_2 - d)$ achromatisch sein muß. Will man gleichzeitig Achromasie der Brennweite erreichen:

$F = f_1 \cdot f_2 / (f_1 + f_2 - d) = \text{const.}$, so folgt hieraus, daß die erste Linse selbst schon achromatisch sein muß: $f_1 = \text{const.}$ Dasselbe folgt für die zweite Linse: $f_2 = \text{const.}$

In der Optik läßt sich die Forderung dadurch erfüllen, daß man jeweils ein achromatisches Paar verwendet, zwei verkittete dünne Linsen, von denen die eine sammelnd, die andere zerstreuernd wirkt; mit einer Kombination solcher Paare kann man dann weitere Linsenfehler kompensieren. In der Atomstrahlenoptik dagegen kann man nicht gleichzeitig zwei Sechspolmagneten an dieselbe Stelle bringen, von denen der eine fokussierend, der andere defokussierend wirkt; denn zwischen ihnen müßte man Platz für einen Hochfrequenzübergang ($\mu_{\text{eff}} < 0 \Rightarrow \mu_{\text{eff}} > 0$) lassen.

Zusammenfassend kann man zum Problem der Achromasie sagen, daß aus prinzipiellen Gründen nur eine annähernde Konstanz der Brennweite (in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich) erreichbar ist. Wenn man jedoch ohnehin zwei Sechspolmagneten einsetzen will, z.B. in Rabi-Apparaturen^{10, 12} oder in Quellen polarisierter Deuteronen nach einem Vorschlag von Clausnitzer, Hess und von Ehrenstein¹³, dann sollte man die chromatische Korrektur der Brennweite, wie sie nach Gl. (12) möglich ist, ausnutzen.

Abschließend zu diesem Abschnitt soll ein experimentelles Ergebnis und seine Deutung berichtet werden, das die vorliegende Arbeit wesentlich angeregt hat. Salzborn¹⁴ fand an der Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen, daß sich an jeder Stelle z hinter dem Magneten ein (etwas unscharfes) Bild der Strahlquellenöffnung auffangen ließ; die Größe des Bildes wuchs linear mit dem Abstand z . Dieses Ergebnis läßt sich anhand der Gl. (8) und (9) deuten. In Fig. 5 sind für zwei Abstände a der Quelle vom Magneteneingang Ort $z = a'$ und Größe $y(a') = V \cdot y_0$ des Bildes der Quellenöffnung für verschiedene Geschwindigkeiten aufgetragen. Man sieht, daß ein Bereich reeller Abbildung und ein Bereich virtueller Abbildung vorliegen, und findet das lineare Anwachsen der Bilder bestätigt. Man versteht auch, daß ein annähernd scharfes Bild an jeder Stelle z entstehen kann: dort werden Atome einer bestimmten Geschwindigkeit exakt fokussiert, während alle anderen wenigstens näherungsweise in dieselbe Richtung laufen.

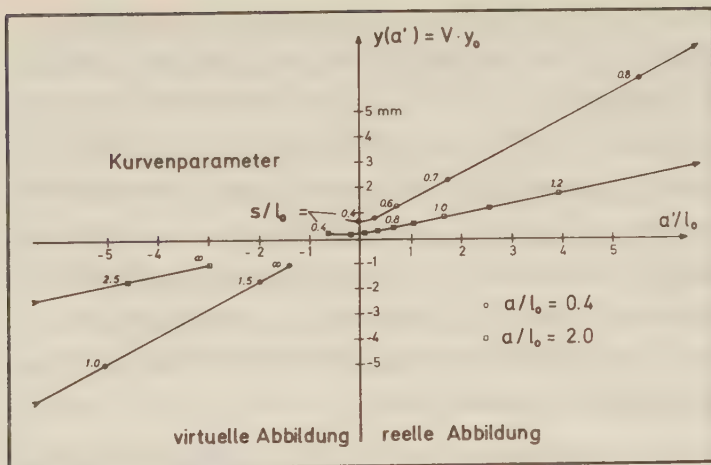


Fig. 5: Bildgröße in Abhängigkeit vom Bildort.
Gegenstandsgröße $y_0 = -1$ mm; Kurvenparameter s/l_0 ;
Scharparameter $a/l_0 = 0,4$ und $2,0$.

Dieses Ergebnis leitet nun über zum nächsten Kapitel, indem es zeigt, daß man zur Erzielung einer hohen Intensität an einer interessierenden Stelle nicht unbedingt den Abbildungsfall ohne chromatischen Fehler einzustellen braucht. Es handelt sich vielmehr um ein Strahltransportproblem: man betrachtet den Transport des gesamten Strahls von einer Ebene zu einer anderen, wobei zwischen den Punkten dieser Ebenen im allgemeinen keine Punkt-auf-Punkt-Abbildung vorliegt.

3. BERECHNUNG DER FLUSSDICHTE- UND DER DICHTEVERTEILUNG

In diesem Kapitel wird die Intensität eines Atomstrahls in einem beliebigen Punkt im Abstand r von der Achse in einer beliebigen Ebene an der Stelle z hinter dem Magneten berechnet. Dabei interessieren zwei Größen: einmal die Flußdichte Ψ , also Anzahl von Atomen pro Zeit und Fläche, zum

anderen die Teilchendichte ϱ , also Anzahl von Atomen pro Volumen. Die Flußdichte wird von einem Flächendetektor gemessen, wie man ihn zum Ausmessen des Strahlprofils benötigt; die Teilchendichte bestimmt die Ausbeute eines Elektronenstoßionisierers, wie er in Atomstrahlquellen zur Erzeugung polarisierter Ionen verwendet wird.

3.1 Phasenraumbetrachtung

Bisherige Versuche, Aussagen über die Intensität hinter einem Sechspolmagneten zu machen, gingen von Raumwinkelbetrachtungen aus^{2, 3, 6}. Die Autoren berechnen fast immer den am Magneteingang von der Achse aus akzeptierten Raumwinkel als Maß für die Intensität unmittelbar am Magnetausgang und diskutieren seine Abhängigkeit von den eingehenden Parametern für eine mittlere Geschwindigkeit; Smith¹⁵ erreichte die Integration über die Geschwindigkeitsverteilung für eine kreisringförmige Quellenöffnung, Brown¹⁶ für eine die Magnetöffnung ausfüllende Quellenöffnung am Magneteingang. Hier soll ein Verfahren in die Atomstrahlphysik eingeführt werden, das zuerst für Strahltransportprobleme geladener Teilchen entwickelt wurde^{17, 18}. Es beruht darauf, die Intensität durch Integration über Unterräume im Phasenraum (PR) zu gewinnen. Es läßt sich zeigen, daß die bisherigen Raumwinkelbetrachtungen Spezialfälle der Methode sind.

Man betrachtet den 6-dimensionalen PR (x, y, z, p_x, p_y, p_z) .

In ihm stellt jeder Punkt der Bahn eines Atoms, der durch Ort (x, y, z) und Impuls (p_x, p_y, p_z) gegeben ist, einen Punkt dar. Ein Strahl stellt im PR eine ganze Mannigfaltigkeit von Punkten dar, die sich zu jedem Zeitpunkt, d.h. für festes z , in einem bestimmten Hypervolumen befinden und

durch eine bestimmte Hyperfläche begrenzt werden. Mit fortschreitender Zeit transformiert sich diese Grenzfläche, so daß dieselben Atome ständig ein anderes Hypervolumen erfüllen.

Im Phasenraum gilt nun der Liouville'sche Satz, der besagt, daß bei Transformationen im PR die lokale Punktdichte unverändert bleibt, falls die Transformationen Bewegungen beschreiben, für die ein Hamilton-Operator existiert. Aus dem Satz folgt sofort, daß die Hypervolumina, die zu beliebigen Zeiten den gesamten Strahl enthalten, stets gleich groß bleiben. Beschreibt man die Transformation durch eine Transformationsmatrix, so muß wegen der Volumenerhaltung die Determinante der Matrix gleich 1 sein.

Man kann nun leicht sowohl die gesuchte Dichte ϱ im Ortsraum als auch die Flußdichte φ ableiten, zunächst für einheitliche Geschwindigkeit. Es sei ϱ_6 die Punktdichte im PR (die Null ist außerhalb des vom Strahl erfüllten Hypervolumens), $d\tau_3 = dx \cdot dy \cdot dz$ und $d\pi_3 = dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$ seien die Volumenelemente im Orts- und Impulsraum. Dann ist $n =$

$\iint \varrho_6 d\pi_3 d\tau_3$ die Gesamtzahl aller Punkte im Strahl.

Da diese aber auch durch $n = \int \varrho d\tau_3$ ausgedrückt werden kann, so folgt zunächst

$$(13) \quad \varrho(x, y, z) = \int \varrho_6 d\pi_3$$

Man erhält also die gesuchte Teilchendichte, indem man die Punktdichte im PR über die Impulskoordinaten integriert. Die gesuchte Flußdichte erhält man dann als

$$(14) \quad \varphi(x, y, z) = v_z \cdot \varrho(x, y, z)$$

Durch die Gl. (13) und (14) wird die im folgenden durchgeführte Berechnung der Intensitätsverteilung beschrieben. Dazu erweist es sich als zweckmäßig, noch einige Vereinfachungen vorzunehmen. Unter der schon eingeführten Voraussetzung, daß sich der Strahl im wesentlichen in z-Richtung bewegen soll, kann $v_z = v = \text{const.}$ gesetzt werden, und man kann schreiben: $p_x = m \cdot v \cdot x'$, $p_y = m \cdot v \cdot y'$, $p_z = m \cdot v$, wobei $x' = dx/dz$, $y' = dy/dz$ die kleinen Winkel mit der z-Achse sind. Wegen $p_z = m \cdot v = \text{const.}$ kann man sich für eine feste Stelle z auf den 4-dimensionalen PR (x, y, p_x, p_y) beschränken, außerdem kann man bei der Integration von der Konstanten $(m \cdot v)^2$ absehen. Das bedeutet den Übergang auf den 4-dimensionalen Raum (x, y, x', y') , der durch eine einfache Skalenänderung aus dem Phasenraum hervorgeht, dafür soll im folgenden der Begriff Phasenraum weiter verwendet werden. Die gesuchten Größen $\mathfrak{g}$ und φ erhält man nun aus der Dichte $\mathfrak{g}_4$ in diesem Raum: $\mathfrak{g}(x, y, z) = \iint \mathfrak{g}_4 dx' dy'$; $\varphi(x, y, z) = \int v \cdot \mathfrak{g}(x, y, z)$, zunächst aber erst für eine bestimmte Strahlgeschwindigkeit v. Man muß $\mathfrak{g}$ und φ nun noch mit der Geschwindigkeitsverteilung falten. Wenn $d \mathfrak{g}_4 / dv = f(v)$ diese Verteilungsfunktion bedeutet, dann gelangt man zur endgültigen Formulierung des Lösungsweges: die Teilchendichte ist gegeben durch

$$(15) \quad \mathfrak{g}(x, y, z) = \iiint d \mathfrak{g}_4 / dv dx' dy' dv$$

die Flußdichte durch

$$(16) \quad \varphi(x, y, z) = \int v \iint d \mathfrak{g}_4 / dv dx' dy' dv.$$

Zu integrieren ist über den mit Teilchen erfüllten Teil der (x', y') -Ebene und über alle Geschwindigkeiten. Im folgenden Abschnitt wird diese Integration nun tatsächlich durchgeführt.

In den Gl. (15) und (16) wird der Zusammenhang der Methode mit Raumwinkelbetrachtungen deutlich; denn die innerhalb der teilchenerfüllten Fläche der (x', y') -Ebene liegenden Winkel sind gerade diejenigen, die den durch den betrachteten Punkt gezeichneten teilchenerfüllten Raumwinkel füllen.

3.2 Durchführung der Phasenraumintegration

Die Aufgabe, die Dichte und die Flußdichte nach Gl. (15) und (16) zu berechnen, ist lösbar, wenn man die Dichte im PR im betrachteten Punkt (x, y, z) kennt. Tatsächlich aber kennt man diese Dichte an der Quellenöffnung. Die Lösung zerfällt dann in vier Teile: zuerst wird eine Aussage über die Dichte im PR am Ort der Strahlquelle gemacht; dann werden die den von Teilchen erfüllten Teil des PR begrenzenden Hyperflächen angegeben; weiter wird die Transformation dieser Flächen bis an die interessierende Stelle z vorgenommen; schließlich wird über die teilchenerfüllte Fläche in der (x', y') -Ebene integriert.

3.2.1 Dichte im Phasenraum

Unter der Voraussetzung $v_z = v = \text{const.}$, welche die Beschränkung auf kleine Winkel $x' \approx \alpha$, $y' \approx \beta$ gegen die Achse bedeutet, hängt die Verteilungsfunktion $d\varphi_4/dv$ in der Quellenöffnung nicht von den Winkeln α , β ab. Das ist für ein

einfaches Loch bei Gültigkeit des $\cos$ -Gesetzes sofort klar: $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$; dasselbe gilt aber auch für irgendwelche Keulen-Winkelverteilungen¹⁹: solange man nur genügend kleine Winkel betrachtet, hat die Verteilungsfunktion für alle Winkel noch nahezu den gleichen Wert. (Die Erfüllung dieser und aller weiteren Voraussetzungen, Annahmen und Näherungen wird im Abschnitt 3.6 geprüft.)

Weiter wird die Annahme gemacht, daß $d\varrho_4/dv$ auch nicht von den Koordinaten (x_0, y_0) in der Quellenöffnung abhängt. Jeder Punkt der Quellenöffnung soll also mit gleicher Dichte erfüllt sein, mit gleicher Flußdichte durchströmt werden. Das ist jedenfalls richtig, solange man (bei nicht allzu hohen Drucken in der Strahlquelle) im Molekularströmungsbereich arbeitet.

Die Verteilungsfunktion hängt dann nur noch von der Geschwindigkeit v ab. Experimente^{20, 21} haben gezeigt, daß für die Flußdichteverteilung in einem Atomstrahl in guter Näherung eine modifizierte Maxwell-Verteilung vorliegt:

$$(17) \quad d\varphi(v)/dv = 2 \cdot \varphi_{\text{ges}}/v_0 \cdot (v/v_0)^3 \cdot \exp(-(v/v_0)^2)$$

$$\text{mit } v_0^2 = 2kT/m \text{ und } \varphi_{\text{ges}} = \int_0^\infty d\varphi(v)/dv \, dv.$$

Daraus folgt für die Dichteverteilung im PR

$$(18) \quad d\varrho_4(v)/dv = \text{const.} \cdot (v/v_0)^2 \cdot \exp(-(v/v_0)^2).$$

Die Verteilungsfunktion kann also, da sie unabhängig von x' , y' ist, aus der inneren Integration in Gl. (15) und (16) herausgenommen werden:

$$(19) \quad \varrho(x, y, z) = \int d\varrho_4(v)/dv \iint dx' \, dy' \, dv$$

$$(20) \quad \psi(x, y, z) = \int v \cdot d\varrho_4(v) dv \iint dx' dy' dv$$

Diese innere Integration läßt sich dann ausführen, sie liefert den teilchenerfüllten Raumwinkel Ω als Fläche der (x', y') -Ebene selbst, der noch vom Punkt (x, y, z) und der Geschwindigkeit v abhängt:

$$(21) \quad \Omega(x, y, z; v) = \iint dx' dy'$$

$$(22) \quad \varrho(x, y, z) = \int d\varrho_4(v) dv \cdot \Omega(x, y, z; v) dv$$

$$(23) \quad \psi(x, y, z) = \int v \cdot d\varrho_4(v) dv \cdot \Omega(x, y, z; v) dv$$

Diese Fläche ist durch die im nächsten Abschnitt abgeleiteten Begrenzungen gegeben.

3.2.2 Begrenzungen im Phasenraum

Die Intensitätsverteilung soll zunächst für die Standardanordnung in einer Atomstrahlapparatur berechnet werden. Eine kreisförmige Strahlquellenöffnung, Radius r_0 , befinde sich im Abstand a vor dem Magneten; an dessen Eingang sitze die zweite Blende des Kollimators, Radius R_0 . R_0 sei gleichzeitig die überall konstante Öffnung des Magneten, l_0 seine Länge, H_0 die magnetische Feldstärke am Achsenabstand $r=R_0$ der Polschuhe.

Dann gibt es für die fokussierte Komponente drei wesentliche Begrenzungen des PR. Erstens durch die Quellenöffnung; dort muß gelten

$$(24) \quad x_0^2 + y_0^2 \leq r_0^2$$

Zweitens durch die Blende am Magneteingang; dort muß gelten:

$$(25) \quad x_a^2 + y_a^2 \leq R_0^2$$

Beide Bedingungen stellen Hyperflächen im PR dar, allerdings gelten sie an verschiedenen Stellen z , zwischen denen eine Transformation vermittelt. Das von ihnen gemeinsam eingeschlossene Volumen im PR soll "Emittanz" des Kollimators genannt werden.

Die dritte Begrenzung ist durch den Magneten selbst gegeben. Das von ihr eingeschlossene Volumen im PR soll "Akzeptanz" des Magneten genannt werden. Man erhält die Bedingung aus dem Energiesatz. Sieht man von der Bewegung in Achsenrichtung ab, so verbleibt eine ebene Bewegung (Ellipsen für die fokussierte, Hyperbeln für die defokussierte Komponente). Die gesamte transversale Energie ist konstant: $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$. Tritt das Atom am Magnetenanfang mit den Koordinaten (x_a, y_a) unter den Winkeln $(dx/dz)_a = x'_a$, $(dy/dz)_a = y'_a$ in den Magneten ein, so ist dort seine Gesamtenergie:

$$(26) \quad E_a = 1/2 \cdot mv^2 \cdot (x_a'^2 + y_a'^2) + \mu_B H_0/R_0^2 \cdot (x_a^2 + y_a^2)$$

Nun wird die Annahme gemacht, daß der Magnet nur solche Atome akzeptiert, die an keiner Stelle größere Achsenabstände als R_0 erreichen; wenn sie $r > R_0$ annehmen, so sollen sie dem Strahl verloren gehen. Diese Annahme ist plausibel; denn entweder stoßen die Atome dann an die Polschuhe des Magneten an und geben höchstens einen diffusen Untergrund, oder sie geraten in den Zwischenraum zwischen den Polschuhen, wo das reale Feld schwächer wird, und werden nicht mehr zur Achse zurückgelenkt.

Für die äußersten, gerade noch akzeptierten Atome ist die Gesamtenergie für $r = R_0$ durch $E_{\max} = E_{\text{rot}}(R_0) + \mu_B H_0$ gegeben. Die Rotationsenergie läßt sich umformen: $E_{\text{rot}}(R_0) = 1/2 \cdot L^2 / \Theta(R_0)$, wobei L den Drehimpuls, $\Theta(R_0) = mR_0^2$ das Trägheitsmoment bei $r = R_0$ bedeuten. Für Zentralkräfte gilt der Drehimpulssatz $L = \text{const.}$; der Wert am Magnetanfang $L = mv \cdot (y'_a \cdot x_a - x'_a \cdot y_a)$ bleibt also erhalten. Damit nimmt die Maximalenergie die Form an

$$(27) \quad E_{\max} = 1/2 \cdot mv^2 \cdot (y'_a \cdot x_a - x'_a \cdot y_a)^2 / R_0^2 + \mu_B H_0.$$

Die Akzeptanzbedingung erhält man dann aus der Forderung, daß die Energie am Magnetanfang den maximalen Wert nicht überschreiten darf, $E_a \leq E_{\max}$:

$$(28) \quad x_a'^2 + y_a'^2 + \frac{x_a^2 + y_a^2}{s^2} - \frac{(y'_a \cdot x_a - x'_a \cdot y_a)^2}{R_0^2} \leq \alpha_{\max}^2$$

mit $\alpha_{\max}^2 = 2 \mu_B H_0 / mv^2$.

Dieser Zusammenhang zwischen den Eintrittskordinaten (x_a, y_a) und den dort zulässigen Winkeln x'_a, y'_a stellt wieder eine Hyperfläche im PR dar und ist die gesuchte dritte Begrenzung. Die rechte Seite ist eine Konstante, $\alpha_{\max}$ bedeutet den von der Achse $x_a = y_a = 0$ höchstens zulässigen Winkel: $x_a'^2 + y_a'^2 \leq \alpha_{\max}^2$. Mit der weiter oben eingeführten Größe s hängt $\alpha_{\max}$ zusammen: $\alpha_{\max} = R_0 / s$.

Für die defokussierte Komponente gibt es keine "akzeptierten" Atome. Hier tritt an die Stelle der Akzeptanzbedingung die Forderung, daß selbst am Magnetende die Atome noch nicht anstoßen:

$$(29) \quad x_e^2 + y_e^2 \leq R_0^2$$

Das hierdurch umfaßte Volumen im PR soll "Transmittanz" genannt werden.

Das Verfahren läßt sich verallgemeinern, wenn man noch weitere Begrenzungen zuläßt, z.B. Blenden im Strahlengang an beliebigen Stellen. Dabei kann es sich sowohl um Lochblenden $x_1^2 + y_1^2 \leq r_{Bl}^2$ als auch um Stopblenden $x_1^2 + y_1^2 \geq r_{Bl}^2$ handeln.

Im ersten Fall liegt der besetzte Teil des PR innerhalb, im zweiten Fall außerhalb der durch das Gleichheitszeichen gegebenen Hyperfläche.

3.2.3 Transformationen im Phasenraum

Die Transformationen im PR vermitteln den Übergang von einer Stelle z zu einer anderen. Sie werden hier benutzt, um die im vorigen Abschnitt beschriebenen Begrenzungen des teilchenerfüllten PR von der Stelle, wo sie ursprünglich galten, bis an die interessierende Stelle z zu transformieren. Zur Beschreibung der Transformationen kann die Matrixmethode²² verwendet werden:

$$(30) \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = (T_4) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

Da die Bewegung in der (x,z) -Ebene von der in der (y,z) -Ebene unabhängig ist, kann die 4×4 -Matrix (T_4) in zwei 2×2 -Matrizen (T_2) zerlegt werden. Die Gesamttransformation be-

steht aus der Transformation in einem Laufrum der Länge a vor dem Magneten (L_a), im Magneten selbst (M) und in einem weiteren Laufrum der Länge z hinter dem Magneten (L_z),

$$(T_2) = (L_z)(M)(L_a):$$

$$(31) \quad (T_2) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda & s \cdot \sin \lambda \\ -1/s \cdot \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda = l_0/s$.

Durch (T_2) kann man (x, x') ebenso wie (y, y') durch frühere Werte (x_0, x'_0) bzw. (y_0, y'_0) ausdrücken. Nun sind die Begrenzungen im PR aber gerade umgekehrt an den früheren Stellen bekannt, man benötigt also die inverse Transformation $(T_2)^{-1}$, um (x_0, x'_0) , (y_0, y'_0) durch (x, x') , (y, y') zu ersetzen.

Es ergibt sich

$$(32) \quad (T_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \lambda - a/s \cdot \sin \lambda & -s \cdot \sin \lambda - a \cdot \cos \lambda \\ +z \cdot (a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda) & \\ 1/s \cdot \sin \lambda & \cos \lambda - z/s \cdot \sin \lambda \end{pmatrix}$$

Außer der Gesamttransformation $(L_z)(M)(L_a)$, welche auf die Emittanzbedingung Gl. (24) angewandt werden soll, braucht man noch die Teiltransformationen $(L_z)(M)$ für die Akzeptanzbedingung Gl. (28) und für die Beschränkung durch die zweite Blende Gl. (25), die beide am Magnetenanfang gelten, sowie (L_z) für die Transmittanzbedingung Gl. (29), die für das Magnetende aufgestellt worden war.

Nun läßt sich jedoch zeigen, daß die Akzeptanzbedingung Gl. (28) bei Transformation mit (M) in sich selbst übergeht. Der Beweis erfolgt entweder durch Einsetzen und Ausrechnen oder auf Grund von Symmetriebetrachtungen: der Magnet

kann am Ausgang nur die Atome emittieren, die innen nirgends angestoßen sind. Die Bedingung dafür folgt aber ebenso wie am Eingang aus dem Energiesatz und hat daher formal auch dieselbe Gestalt. Man kann die Akzeptanzbedingung deshalb auch als Emittanzbedingung des Magneten auffassen:

$$(33) \quad x_e'^2 + y_e'^2 + \frac{x_e^2 + y_e^2}{s^2} - \frac{(y_e' x_e - x_e' y_e)^2}{R_o^2} \leq \alpha_{\max}^2 = \frac{R_o^2}{s^2}$$

Man benötigt zur Überführung dieser Bedingung bis an die interessierende Stelle ebenso wie für die Transmittanzbedingung dann nur noch die Transformation

$$(34) \quad (L_z)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die defokussierte Komponente lautet die Matrix

$$(35) \quad (T_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh \lambda + a/s \cdot \sinh \lambda & -s \cdot \sinh \lambda - a \cdot \cosh \lambda \\ -z \cdot (a/s \cdot \sinh \lambda + \cosh \lambda) & \\ -1/s \cdot \sinh \lambda & \cosh \lambda + z/s \cdot \sinh \lambda \end{pmatrix}$$

3.2.4 Integration im Phasenraum, Rechenprogramm

Um den teilchenerfüllten Raumwinkel Ω als Fläche der (x', y') -Ebene zu berechnen, werden die drei Beschränkungen durch die Quellenöffnung, die Blende am Magneteingang und durch den Magneten selbst jeweils einzeln transformiert, dann wird der Durchschnitt dieser Flächen gebildet.

Zunächst kann man jedoch noch bemerken, daß für die fokussierte Komponente die Beschränkung durch die Magneteingangs-

blende Gl. (25) in der Beschränkung durch den Magneten Gl. (28) enthalten ist. Beide Bedingungen gelten am Magneteingang, sind also direkt vergleichbar. Gl. (25) fordert $x_a^2 + y_a^2 \leq R_0^2$ nur am Eingang, Gl. (28) fordert $x^2 + y^2 \leq R_0^2$ an jeder Stelle des Magneten; die letztere ist also eine stärkere Forderung, die schwächere kann daher fallengelassen werden. Es bleibt hier allein die Akzeptanzbedingung zu transformieren; diese galt aber als Emittanzbedingung des Magneten auch am Magnetausgang. Setzt man nach Gl. (34) $y_e = y - z \cdot y'$, $y'_e = y'$, analog für x_e , x'_e , in Gl. (33) ein, so erhält man

$$(36) \quad x'^2 + y'^2 + \frac{(x-z \cdot x')^2 + (y-z \cdot y')^2}{s^2} - \frac{(y' \cdot x - x' \cdot y)^2}{R_0^2} \leq \frac{R_0^2}{s^2}$$

Dies stellt die Beschränkung durch den Magneten im interessierenden Punkt (x, y, z) dar.

Weiter muß noch die Emittanzbedingung der Quellenöffnung transformiert werden. Setzt man unter Verwendung von Gl.

(32) x_0 und y_0 in Gl. (24) ein, so erhält man

$$(37) \quad (x/V - (s \cdot \sin \lambda + a \cdot \cos \lambda - z/V) \cdot x')^2 + (y/V - (s \cdot \sin \lambda + a \cdot \cos \lambda - z/V) \cdot y')^2 \leq r_0^2$$

mit V aus Gl. (9). Dies stellt die Beschränkung durch die Quellenöffnung im interessierenden Punkt dar.

Nun kann man endlich noch ausnutzen, daß das Intensitätsproblem zylindersymmetrisch ist; daher kann $x = 0$, $y = r$ gesetzt werden. Diese Spezialisierung bezieht sich nur auf die interessierende Stelle z , an allen anderen Stellen

werden durchaus räumliche Bahnen $x \neq 0$ zugelassen. Gl. (36) und (37) nehmen dann die Form an:

$$(38) \quad x'^2 + \frac{(y' - r \cdot z / (z^2 + s^2))^2}{1 - r^2 / R_0^2 \cdot s^2 / (z^2 + s^2)} \leq \frac{R_0^2}{z^2 + s^2}$$

$$(39) \quad x'^2 + (y' - \frac{r}{z-a'})^2 \leq \frac{r_0^2 \cdot v^2}{(z-a')^2}$$

Dabei bedeuten a' die im Abschnitt 2.1 eingeführte Entfernung des Bildes der Quellenöffnung hinter dem Magneten, Gl. (8), und V die Vergrößerung im Abbildungsfall, Gl. (9). Man sieht, daß die erste Bedingung eine verschobene Ellipse, die zweite einen verschobenen Kreis in der (x', y') -Ebene darstellt. Die ihnen gemeinsame Fläche ist der Wert der gesuchten Funktion $\Omega(x, y, z; v)$ Gl. (21) im interessierenden Punkt ($x = 0, y = r, z$) für eine bestimmte Geschwindigkeit. Multipliziert man ihn mit dem Wert der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion und summiert die Beiträge aller Geschwindigkeiten auf, so erhält man die gesuchte Intensität im betrachteten Punkt. Die Durchführung dieser Rechnung geschah numerisch.

Für die defokussierte Komponente wird die Transformation $(T_2)^{-1}$ Gl. (35) auf die Emittanzbedingung der Quellenöffnung Gl. (24) angewandt. Dabei erhält man formal dasselbe Ergebnis wie für die fokussierte Komponente, Gl. (39), wobei hier a' durch Gl. (10) und V durch Gl. (11) gegeben sind.

Die durch die Transmittanzbedingung gegebene Beschränkung Gl. (29) ist im allgemeinen schärfer als die durch die

Magneteingangsblende Gl. (25), falls der Strahl im wesentlichen divergent in den Magneten eintritt; nur für einen konvergenten Strahl kann die Eingangsblende eine schärfere Begrenzung darstellen, dieser Fall ist aber unrealistisch. Es bleibt hier allein die Transmittanzbedingung zu transformieren. Unter Verwendung von Gl. (34) nimmt sie die Form an:

$$(40) \quad x'^2 + (y' - r/z)^2 \leq R_0^2/z^2$$

Auch die Berechnung der den beiden verschobenen Kreisen Gl. (39) und (40) gemeinsamen Fläche in der (x', y') -Ebene geschah numerisch mit einem Rechenprogramm.

Die Intensitätsverteilung in den Ebenen z für die Achsenabstände r hängt von fünf Parametern ab: Radius r_0 der Strahlquellenöffnung, Abstand a der Quelle vom Magneten, Radius R_0 der Magnetöffnung, Länge l_0 des Magneten sowie Stärke des Magnetfeldes, ausgedrückt durch den am Magneteingang von der Achse aus höchstens akzeptierten Winkel $\alpha_0 = \alpha_{\max}(v_0) = \sqrt{2 \mu_B H_0 / m v^2} = \sqrt{\mu_B H_0 / kT}$ bei der in der Strahlquelle häufigsten Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2kT/m}$.

Nach Eingabe dieser fünf Parameter berechnet das Programm (INTSIX) für eine bestimmte Stelle z für einen bestimmten Achsenabstand r den Beitrag einer Geschwindigkeit v , indem es in einem Unterprogramm (NF) die dem Kreis Gl. (39) und der Ellipse Gl. (38) (bzw. Gl. (40) für die andere Komponente) gemeinsame Fläche Ω in Einheiten eines kleinen Rasterquadrats zählt. Die Beiträge vieler einzelner Geschwindigkeiten ergeben aufsummiert $\varphi(r, z)$ und $\vartheta(r, z)$;

anschließend werden die Werte an derselben Stelle z für einen anderen Achsenabstand r berechnet usw. Stehen die Profile $\varphi(r,z)$ und $q(r,z)$ für alle r zur Verfügung, so wird für diese Stelle z noch der Gesamtfluß durch die Detektorfläche F_d

$$(41) \quad \Phi(z) = \int_{F_d} \varphi(r,z) \, df$$

berechnet; ebenso wird die Größe

$$(42) \quad B(z) = \int_{F_d} q(r,z) \, df$$

berechnet, die hier "Besetzung" genannt werden soll. Sie bedeutet die Anzahl der Atome pro Länge in Achsenrichtung oder auch die über die Detektorfläche F_d gemittelte Dichte:

$B(z) = F_d \cdot \overline{q(z)}$. Gerade diese bestimmt die Ausbeute eines Ionisierers vom Querschnitt F_d . Die Integration nach Gl.

(41) und (42) geschieht näherungsweise, indem das Integral durch eine Summe approximiert wird:

$$(43) \quad \Phi(z) = \int \varphi(r,z) \cdot 2\pi r \cdot dr \approx \sum_i \overline{\varphi(r_i,z)} \cdot 2r_i \cdot \pi \cdot \Delta r$$

ebenso für $B(z)$, wobei man von den konstanten Faktoren $\pi \cdot \Delta r$ absehen kann; anschließend werden die Profile für die nächste Stelle z berechnet usw.

3.3 Anschluß der berechneten Relativwerte an Meßgrößen

Die vom Programm berechneten Ergebnisse sind zunächst nur als relatives Intensitätsmaß gedacht, um Abhängigkeiten zu diskutieren. Man kann sie jedoch auch an absolut meßbare

Größen anhängen. Als solche Größe wird $d\phi^*(\alpha = 0)/d\Omega$, der Gesamtfluß durch die Strahlquellenöffnung pro Raumwinkel in Achsenrichtung, gewählt; dieser Wert ist leicht meßbar, er ergibt sich z. B. aus aufgenommenen Keulen-Winkelverteilungen $d\phi^*(\alpha)/d\Omega$ für $\alpha = 0$.

Der Vergleich der hieraus folgenden und der nach dem Rechenprogramm berechneten Flußdichte und Dichte soll im Abstand a von der Strahlquelle in einer Fläche f auf der Achse erfolgen. Die wahre Flußdichte (gesternt) ergibt sich dort zu

$$(44) \quad \varphi^*(0, a) = \frac{d\phi^*(0)/d\Omega \cdot \Omega}{f} = \frac{d\phi^*(0)/d\Omega \cdot f/a^2}{f} = \frac{d\phi^*(0)/d\Omega}{a^2}$$

Nach der Phasenraummethode ist das Ergebnis für $r = 0$ die Fläche des Kreises in der (x', y') -Ebene $x'^2 + y'^2 = r_0^2/a^2$, also $\pi \cdot r_0^2/a^2$, gezählt in Einheiten des Rasterquadrats:

$$(45) \quad N = \frac{\pi \cdot r_0^2/a^2}{(\text{Raster})^2}$$

Das gilt zunächst für eine Geschwindigkeit; über alle Geschwindigkeiten wurde summiert:

$$(46) \quad \varphi(0, a) = N \cdot \sum_{i=1}^{60} (v_i/v_0)^3 \cdot \exp(-(v_i/v_0)^2)$$

Nun ist

$$(47) \quad 2 \cdot \int_0^{\infty} (v/v_0)^3 \cdot \exp(-(v/v_0)^2) dv/v_0 = 1$$

$$\approx 2 \cdot \sum_{i=1}^{60} (v_i/v_0)^3 \cdot \exp(-(v_i/v_0)^2) \cdot \Delta v/v_0;$$

da $\Delta v/v_0 = 1/20$ gewählt wurde, ist der Wert der Summe gleich 10:

$$(48) \quad \psi(0, a) = 10 \cdot N$$

Bis auf einen konstanten Faktor c_1 stimmen Gl. (44) und (48) überein: $\psi^*(0, a) = c_1 \cdot \psi(0, a)$. Für die Konstante ergibt sich:

$$(49) \quad c_1 = d\psi^*(0)/d\Omega \cdot \frac{(\text{Raster})^2}{10\pi \cdot r_0^2}$$

Statt $d\psi^*(0)/d\Omega$ hätte man auch die Flußdichte in der Strahlquellenöffnung pro Raumwinkel als Meßgröße einführen können: $d\psi^*(0)/d\Omega = \frac{d\psi^*(0)/d\Omega}{\pi \cdot r_0^2}$. Damit folgt für den Proportionalitätsfaktor:

$$(50) \quad c_1 = d\psi^*(0)/d\Omega \cdot \frac{(\text{Raster})^2}{10}$$

Obwohl speziell für die Achse abgeleitet, gilt der Faktor c_1 ganz allgemein für den Zusammenhang zwischen wahrer Flußdichte und dem vom Programm berechneten Profil:

$$(51) \quad \psi^*(r, z) = c_1 \cdot \psi(r, z)$$

Bei der Berechnung des Gesamtflusses durch die Detektorfläche nach Gl. (43) war ein konstanter Faktor $d = \pi \cdot \Delta r = \pi/2$ mit $\Delta r = 1/2$ abgespalten worden; der wahre Fluß $\phi^*(z)$ ergibt sich damit aus der vom Programm gelieferten Zahl $\phi(z)$:

$$(52) \quad \begin{aligned} \phi^*(z) &= \int \psi^*(r, z) \cdot 2\pi r \, dr = c_1 \cdot \int \psi(r, z) \cdot 2\pi r \, dr \\ &= c_1 \cdot d \cdot \phi(z) \end{aligned}$$

Die wahre Teilchendichte $\mathcal{Q}^*$ folgt aus der Flußdichte ψ^* :

$$\begin{aligned}
 \xi^* &= \int_0^{\infty} d\xi^*/dv \, dv = \int_0^{\infty} 1/v \cdot d\psi^*/dv \, dv \\
 (53) \quad &= 2\psi^* \cdot \int_0^{\infty} 1/v \cdot (v/v_0)^3 \cdot \exp(-(v/v_0)^2) \, dv/v_0 \\
 &= \sqrt{\pi}/2 \cdot \psi^*/v_0
 \end{aligned}$$

$$(54) \quad \xi^*(0,a) = \sqrt{\pi}/2 \cdot \psi^*(0,a)/v_0 = \sqrt{\pi}/2 \cdot \frac{d\psi^*(0)/d\Omega}{v_0 a^2}$$

Dagegen berechnet das Programm

$$(55) \quad \xi(0,a) = N \cdot \sum_{i=1}^{60} (v_i/v_0)^2 \cdot \exp(-(v_i/v_0)^2)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} (v/v_0)^2 \cdot \exp(-(v/v_0)^2) \, dv/v_0 = \sqrt{\pi}/4 \\
 (56) \quad &\approx \sum_{i=1}^{60} (v_i/v_0)^2 \cdot \exp(-(v_i/v_0)^2) \cdot \Delta v/v_0 :
 \end{aligned}$$

$$(57) \quad \xi(0,a) = 5 \cdot \sqrt{\pi} \cdot N$$

Gl. (54) und (57) sind wieder proportional: $\xi^*(0,a) = c_2 \cdot \xi(0,a)$

$$(58) \quad c_2 = c_1/v_0$$

Die wahre Besetzung $B^*(z)$ erhält man aus der Zahl $B(z)$ analog wie oben:

$$(59) \quad B^*(z) = c_2 \cdot d \cdot B(z)$$

3.4 Darstellung des Verfahrens im 2-dimensionalen Phasenraum

In den vorigen Abschnitten wurde die Phasenraumintegration formal beschrieben. Als Ergänzung soll in diesem Abschnitt eine Veranschaulichung der einzelnen Vorgänge folgen, die natürlich nicht im 4-dimensionalen PR, sondern nur im 2-dimensionalen PR (y, y') geschehen kann. Dazu werden ebene Bahnen durch die Achse betrachtet, die also ganz in der (y, z) -Ebene verlaufen. Eine solche Bahn ist Teillösung der allgemeinen Bewegungsgleichung, weil sich deren Gesamtlösung ja aus den beiden Projektionen in die (x, z) - und die (y, z) -Ebene zusammensetzen läßt. Wird nun $x = 0$, $x' = 0$ gesetzt, so geht die Beschränkung durch die Quellenöffnung Gl. (24) über in $y_0^2 \leq r_0^2$, d.h. $|y_0| \leq r_0$; die Beschränkung durch die Blende am Magneteingang Gl. (25) in $y_a^2 \leq R_0^2$, d.h. $|y_a| \leq R_0$. Die Akzeptanzbedingung Gl. (28) lautet dann:

$$(60) \quad y_a'^2 + y_a^2/s^2 \leq R_0^2/s^2.$$

Man sieht, daß sie tatsächlich eine schärfere Forderung ist als die Beschränkung durch die Magneteingangsblende Gl. (25). Die für die defokussierte Komponente geltende Transmittanzbedingung Gl. (29) geht in $y_e^2 \leq R_0^2$, d.h. $|y_e| \leq R_0$ über. Alle diese Beschränkungen sind in Fig. 6 in der (y, y') -Ebene eingezeichnet; jeweils der schraffierte Teil ist zugelassen.

Die Transformationen im PR bedeuten nun Abbildungen in dieser Ebene. Und zwar wird die Transformation (L_a) durch den Laufrum vor dem Magneten, angewandt auf die Emittanz-

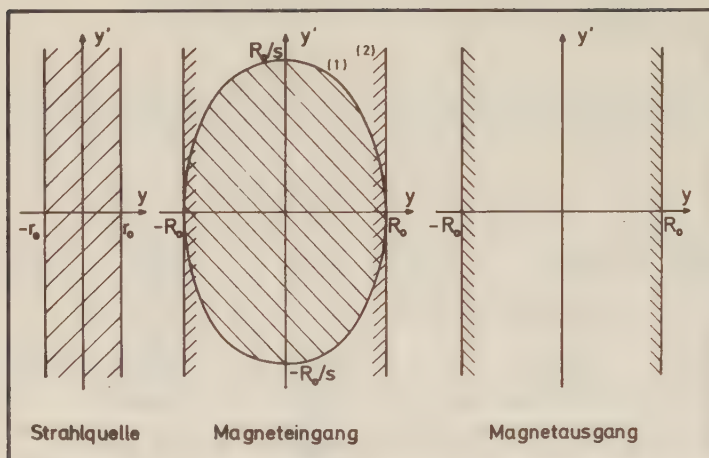


Fig. 6: Begrenzungen im Phasenraum durch die Öffnung der Strahlquelle, die Magneiteingangsblende (2), den Magneten selbst (1) und den Magneitenausgang.

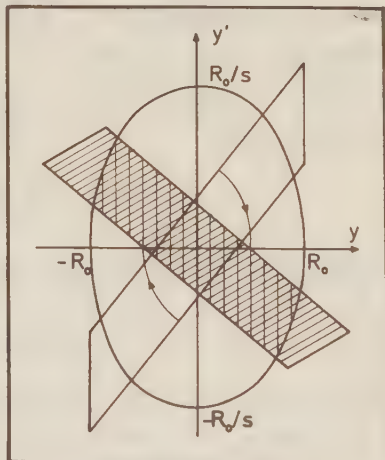
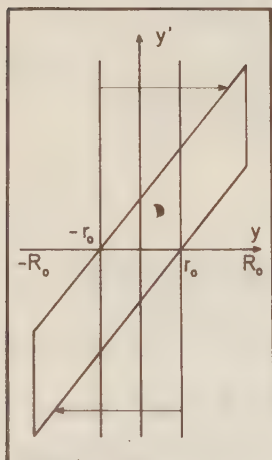


Fig. 7: Transformation (L_a) im Laufrum der Länge a vor dem Magneten und Beschränkung_a am Magneiteingang.

Fig. 8: Transformation (M) durch den Magneten für die fokussierte Komponente und Beschränkung im Magneten.

bedingung der Strahlquellenöffnung, in Fig. 7 durch eine seitliche Verkipfung in Pfeilrichtung wiedergegeben.

Für die fokussierte Komponente bedeutet die Transformation (M) durch den Magneten eine Bewegung der Punkte im PR auf ähnlichen Ellipsen, die alle das Achsenverhältnis s haben, Fig. 8. Sie bildet damit die Akzeptanzellipse Gl. (60) auf sich ab und den von der Quellenöffnung her besetzten PR auf die schraffierte Gestalt; nur der innerhalb der Ellipse liegende doppelt schraffierte Teil des PR ist am Ende des Magneten noch von Atomen besetzt.

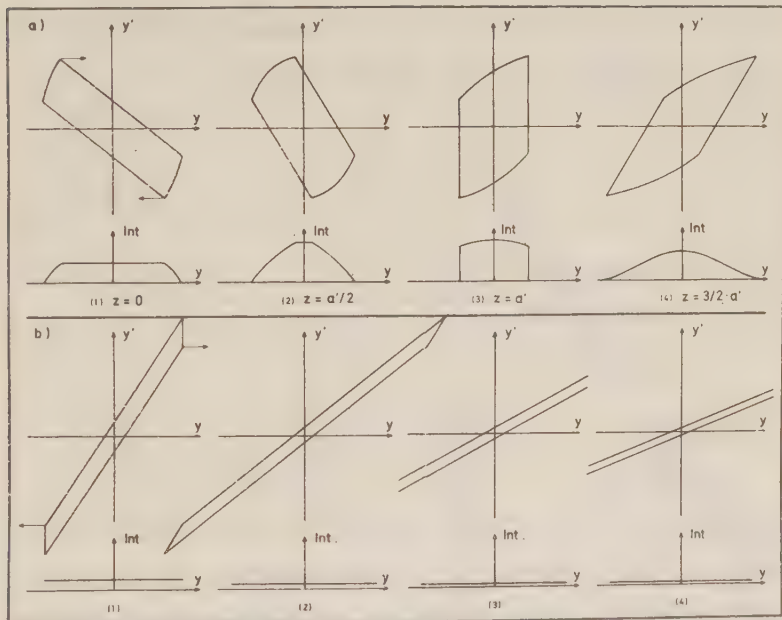


Fig. 9: Transformation (L_z) im Laufrum der Länge z hinter dem Magneten, angewandt auf den am Magnetausgang noch besetzten Phasenraum a) für die fokussierte Komponente, b) für die defokussierte Komponente. Das Strahlprofil ist jeweils darunter gezeichnet.

Dieser verkippt im folgenden Laufraum bis an die Stelle z wieder in Pfeilrichtung und nimmt nacheinander die Formen (1), (2), (3) und (4) in Fig. 9 a) an. Dabei wird die Gestalt (3) gerade an der Stelle $z = a'$, der Bildentfernung, erreicht; in der Tat ergibt sich eine scharfrandige Abbildung der Strahlquellenöffnung. Das Intensitätsprofil gewinnt man hier durch Integration über y' , also als Länge $\Delta y'$ zwischen der unteren und der oberen Begrenzung des teilchenerfüllten PR für jeden Achsenabstand $r = y$.

Für die defokussierte Komponente bedeutet die Transformation (M) durch den Magneten eine Bewegung der Punkte im PR auf Hyperbeln mit dem Achsenverhältnis s , Fig. 10.

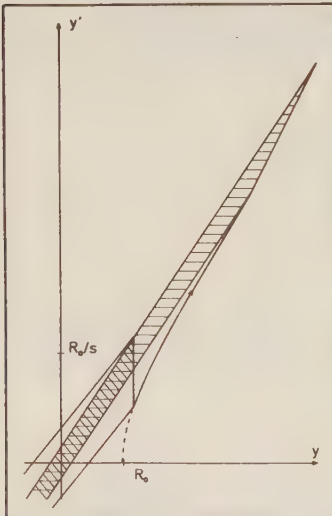


Fig. 10: Transformation (M) durch den Magneten für die defokussierte Komponente und Beschränkung am Magnetausgang.

Sie transformiert so den von der Quellenöffnung her besetzten PR auf die schraffierte Gestalt; nur der innerhalb der Begrenzung durch den Magnetausgang liegende doppelt schraffierte Teil des PR ist am Ende des Magneten noch besetzt. Dieser verkippt im anschließenden Laufräum weiter und nimmt an denselben Stellen z wie in Fig. 9 a) die Formen (1) bis (4) in Fig. 9 b) an. Darunter ist das sich durch Integration über y' ergebende Intensitätsprofil gezeichnet; man sieht, daß es im Bereich $r \leq R_0$, der in einer Atomstrahlapparatur meist allein interessiert, über r konstant ist.

3.5 Ergebnisse: Flußdichte- und Dichteverteilung über r und z

Die folgenden Fig. 11 bis 13 zeigen Ergebnisse für $\varphi(r,z)$ und $\varrho(r,z)$ jeweils für die fokussierte und die defokussierte Komponente. Als Parametersatz wurden diejenigen Werte gewählt, die an der Erlanger Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen vorliegen: $r_0 = 1,5$ mm, $a = 150$ mm, $R_0 = 4$ mm, $l_0 = 150$ mm und $\alpha_0 = 0,032$.

Bei der fokussierten Komponente sieht man ein annähernd lineares Auseinanderlaufen des Strahls, das schon durch die Bemerkung zu Fig. 5 erwartet worden war. Der Abfall der Intensität mit der Entfernung z ist schwächer als bei der defokussierten Komponente. Bei dieser wurde die Abhängigkeit von r nicht gezeichnet, es liegt wie erwartet eine über r konstante Intensität vor.

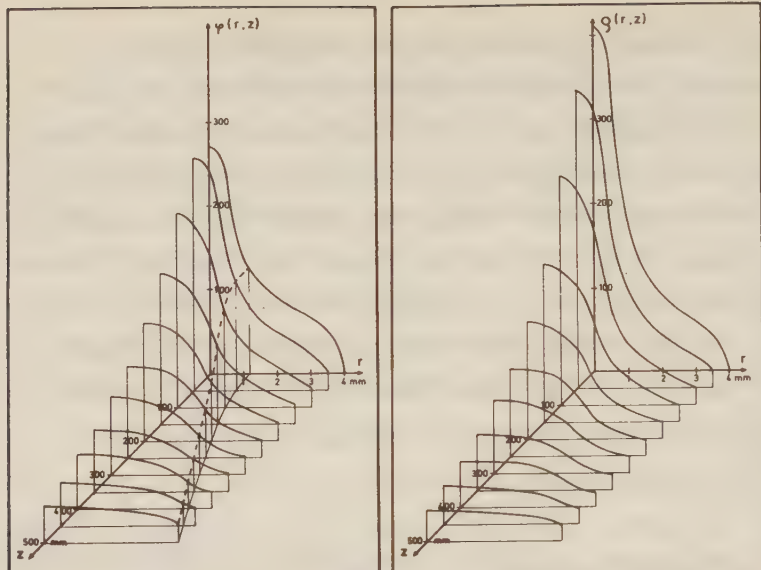


Fig. 11: Flußdichteverteilung $\varphi(r,z)$ am Arbeitspunkt der Erlanger Tandem-Quelle für die fokussierte Komponente. Gestrichelt: Halbwertsbreite der Profile, etwa linear mit z ansteigend.

Fig. 12: Dichteverteilung $g(r,z)$ am Arbeitspunkt für die fokussierte Komponente.

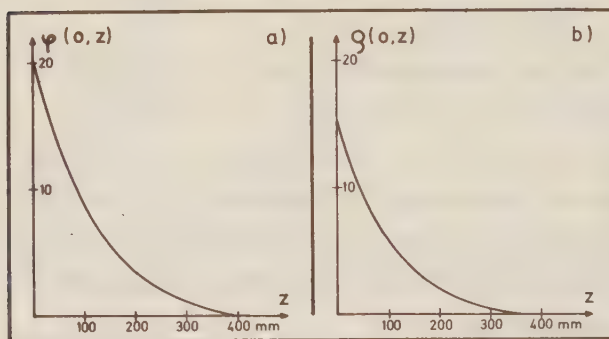


Fig. 13: a) Flußdichte $\varphi(0,z)$, b) Dichte $g(0,z)$ für die defokussierte Komponente auf der Achse.

Weitere Ergebnisse werden im folgenden Kapitel gezeigt, wo die Frage der Optimalisierung der Intensität an einer vorgegebenen Stelle diskutiert wird.

3.6 Fehlerdiskussion

In diesem Abschnitt werden die an verschiedenen Stellen gemachten Voraussetzungen, Annahmen und Näherungen diskutiert. Die Voraussetzungen und Annahmen betreffen einerseits die Strahlquelle, andererseits den Magneten; außerdem sind die im Verlauf der numerischen Ausrechnung verwendeten Näherungen zu prüfen.

3.6.1 Voraussetzungen über die Strahlquelle

Für die Dichteverteilungsfunktion war vorausgesetzt worden, daß sie für genügend kleine Winkel α von der Richtung gegen die Achse unabhängig sein sollte. Als in Frage kommende Winkel α braucht man nun allenfalls $\alpha_{\max}$, den höchstens von der Achse aus akzeptierten Winkel, in Betracht zu ziehen. Dieser ist durch Gl. (28) gegeben, nimmt also für H-Atome mit einer in einer Entladungsröhre typischen Geschwindigkeit ($v_0 = 3000$ m/s) mit $H_0 = 7,5$ kOe den Wert $\alpha_{\max}(v_0) = 0,032$ an. Für so kleine Winkel kann nun tatsächlich $\cos \alpha$, aber auch der Wert von realistischen Keulenverteilungen als konstant gleich 1 angesehen werden. Wesentlich kleinere Geschwindigkeiten als v_0 werden zwar noch bei größeren Winkeln akzeptiert, doch fällt der dadurch entstehende Fehler wegen der entsprechend geringeren Wahrscheinlichkeit dieser Geschwindigkeiten nicht stark

ins Gewicht.

Für die Dichte im PR war weiter vorausgesetzt worden, daß sie von den Koordinaten (x_0, y_0) innerhalb der Quellenöffnung unabhängig sein sollte. Diese Annahme ist gerechtfertigt im Molekularströmungsbereich, wo der Strahl beim Durchfliegen der Öffnung keine Wechselwirkung mehr erleidet. Im Übergangsbereich zur Laminarströmung kann dagegen vor der Öffnung eine "Wolke" entstehen. Als Begrenzung für eine solche Wolke wird diejenige Fläche angesehen, von der ab die Atome keine Wechselwirkung mehr erfahren. Über die Form der Wolke vor einem Loch von etwa 1 mm $\varnothing$ liegen von Kratzstein²³ Messungen bei verschiedenen Drucken vor. Man sieht aus den dort gefundenen Ergebnissen, daß bei höheren Drucken durchaus eine Wolke vor der Quellenöffnung existiert, die den zentralen Teil der Öffnung bevorzugt, dafür aber auch außerhalb der Fläche Atome starten läßt. Der Effekt wird bei Abbildung der Öffnung durch einen Sechspolmagneten zu einer Verschmierung der idealen Profile führen. Um also die theoretische Berechnung der Intensitätsverteilung durch Messungen zu testen, sollte man niedrige Drucke in der Strahlquelle einstellen. Das wurde bei Messungen zur Prüfung der Rechnungen getan. Andererseits zeigen die Ergebnisse von Kratzstein, daß man für höhere Drucke die Verteilungsfunktion doch als vom Ort in der Quellenöffnung abhängig betrachten müßte, wenn die freien Weglängen kleiner als die Dimensionen der Öffnung werden. Diese Verfeinerung des Verfahrens wurde hier der Einfachheit der Rechnungen halber nicht durchgeführt.

Einen ähnlichen Effekt auf die Intensitätsverteilung, nämlich Verbreiterung der Profile, wie die Existenz einer Wolke hätte ein nicht genügend gutes Vakuum längs des Strahlweges. Dieser Fehler konnte für die normalen Betriebsbedingungen der Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen außer acht gelassen werden. Der Strahl verläuft dort nur wenige cm in einem ersten Pumpraum mit einem Druck von normalerweise $2 \cdot 10^{-4}$ Torr (mittlere freie Weglänge $\lambda = 50$ cm), anschließend in einem zweiten Pumpraum mit einem Druck von weniger als 10^{-5} Torr.

Die letzte Voraussetzung über die Strahlquelle betraf die Geschwindigkeitsverteilung. Hier war vorausgesetzt worden, daß es sich um eine Maxwell-Verteilung Gl. (17) handeln sollte. Diese Voraussetzung ist weitgehend erfüllt, wie für K-Atome von Marcus und McFee²⁰, für H-Atome von Lindner²¹ nachgewiesen wurde. Abweichungen haben sich bei höheren Drucken nur bei kleinen Geschwindigkeiten ergeben, wohl wegen Streuung im Strahl.

3.6.2 Voraussetzungen über den Sechspolmagneten

Die erste Voraussetzung über den Magneten betraf die Feldform: im Innern war ein Feld der Form $H(r) = H_0 \cdot r^2 / R_0^2$ angenommen worden. Diese Forderung ist vollständig erfüllbar: Fig. 14 a) zeigt eine Messung des Feldes des für die Erlanger Tandem-Quelle von Dürr⁸ gebauten Magneten, die im Bereich $r \leq R_0$ exakt der Parabelform folgt. Fig. 14 b) zeigt dazu das an diesem Magneten verwendete Profil der Polschuhe.

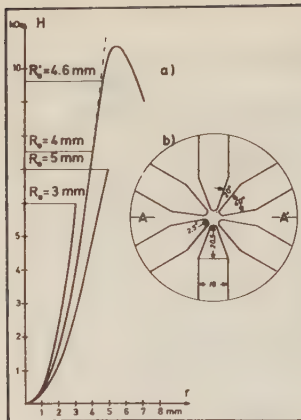


Fig. 14: a) Magnetfeldmessungen $H(r)$ (Abb. 26) für $R_0 = 3$ mm, 4 mm (Arbeitspunkt) und 5 mm; b) Form der verwendeten Polschuhe. Die Messungen folgten der Linie AA' .

Anhand der Fig. 14 kann man nun die Annahme prüfen, ob Atome, die innerhalb des Magneten Orte mit $r \geq R_0$ annehmen würden, wirklich für den Strahl verloren gehen, wie dies bei der Ableitung der Akzeptanzbedingung gefordert worden war. Für die Polschuhsektoren von je 40° ist das gut erfüllt. Im Zwischenraum zwischen den Polschuhen von je 20° aber wirkt das Feld auch noch für größere Achsenabstände fokussierend, allerdings immer schwächer werdend. Entnimmt man als effektiven Abstand, bis zu dem das Feld hier noch als ideal fokussierend gedacht werden kann, aus Fig. 14 $R_0' = 4,6$ mm, so ergibt sich, weil dieser größere Radius nur in einem Drittel der gesamten Fläche wirksam ist, ein effektiver Magnetradius $R_{0 \text{ eff}} = 4,2$ mm, der also um 5 % größer ist als der tatsächliche. Einen Fehler dieser Größe kann man für die Intensitätsverteilung erwarten, falls diese linear von R_0 abhinge. Es zeigt sich jedoch, daß sie im aktuellen Fall in der Nähe des tatsächlichen Wertes von R_0 ein Maximum durchläuft (vergl. Fig. 18), so daß der Fehler klein wird.

Dasselbe kann man von einem Fehler sagen, der durch das Randfeld gegeben ist. Ein realer Magnet hat ja ein allmählich ansteigendes Feld, das über seine Länge hinausreicht. Man kann ihm eine effektive Länge zuschreiben, die etwa $l_0 \text{ eff} = l_0 + R_0$ beträgt¹⁸; diese Verlängerung macht für $l_0 = 150 \text{ mm}$, $R_0 = 4 \text{ mm}$ etwa 3 % aus, kann aber, weil die Intensität im aktuellen Fall in der Nähe von l_0 ein Maximum annimmt (vergl. Fig. 19), ebenso wie oben außer acht gelassen werden.

Bei der Ableitung der Akzeptanzbedingung Gl. (28) aus dem Energiesatz war implizit vorausgesetzt worden, daß der Magnet sehr lang ist, daß nämlich selbst für sehr schnelle Atome $l_0/s \gg \pi$ ist: mindestens das erste Extremum der Sinusbahn sollte im Magneten liegen; die Forderung war dann, daß es kleiner als R_0 sein sollte. Die Übertragung der daraus folgenden Akzeptanzbedingung auch auf kürzere Magneten stellt eine Näherung dar, von der sich zeigen läßt, daß sie auf das Ergebnis keinen Einfluß hat: tatsächlich können durch einen kurzen Magneten auch Atome hindurchgelangen, die diese Bedingung verletzen, dann nämlich, wenn sie ihr Extremum noch nicht erreicht haben. Solche Atome verlassen den Magneten aber stets divergent. Wenn man sich also, wie dies in praktischen Fällen allein sinnvoll ist, für die Intensitätsverteilung im Bereich $r \leq R_0$ interessiert, so ist die Übertragung der Akzeptanzbedingung auch auf kurze Magneten zulässig, ohne daß man einen Fehler begeht. Ähnlich verhält es sich mit der Transmittanzbedingung Gl. (29). Nur für einen stark konvergent in den Magneten einlaufenden Strahl kann die Eingangsblende eine schärfere

Bedingung darstellen als die Ausgangsöffnung. Wenn man sich auf den allein sinnvollen Fall einer Quellenöffnung $r_0 \leq R_0$ beschränkt, so stellt für den dann divergent einlaufenden Strahl die Ausgangsöffnung die schärfere Bedingung dar.

Eine weitere Voraussetzung war, daß das effektive magnetische Moment der Atome im Strahl konstant sein sollte. Dies ist z.B. für H-Atome für die beiden Komponenten (1) und (3) im Breit-Rabi-Diagramm² $E = f(H)$ vollständig erfüllt, für die ebenfalls fokussierte Komponente (2) dagegen sowie für die ebenfalls defokussierte Komponente (4) nur für größere Magnetfelder: $H \gg H^*$, wobei $H^* = 507$ Oe ist. Diese beiden Komponenten werden in der Nähe der Achse, wo diese Bedingung verletzt ist, schwächer fokussiert bzw. defokussiert. Eine geschlossene Lösung der Bewegungsgleichung für sie ist nicht möglich, deshalb läßt sich auch die Transformation (M) durch den Magneten nicht angeben. Durch numerische Integration in einem typischen Beispiel ließ sich aber zeigen, daß sich die Bahn in der Nähe der Achse für die Komponenten (1) und (2) nur wenig unterscheidet. Das Ergebnis ist einleuchtend, weil in Achsennähe insgesamt nur geringe Kräfte auftreten. In allen Sechspolmagneten, die überhaupt starke Felder zur Fokussierung verwenden, ist daher der Unterschied zwischen den Komponenten (1) und (2) sowie (3) und (4) nicht groß. Anders ist es, wenn nur ein schwaches Feld verwendet wird²⁴; hier liefert die eingeführte Voraussetzung $\mu_{\text{eff}} = \text{const.}$ nur die Intensität der reinen Zustände (1) und (3). Allerdings sind aus Intensitätsgründen fast alle früheren Versuche einer derartigen Trennung der einzelnen Komponenten im schwachen Feld wieder aufgegeben worden. Die Be-

schränkung $\mu_{\text{eff}} = \text{const.}$ ist also kein großer Nachteil, weil sie im praktisch wichtigen Starkfeldfall nur zu geringen Abweichungen führen kann.

Eine letzte Fehlermöglichkeit, nämlich Nullfeldübergänge zwischen den Komponenten (1), (2) und (3) in der Nähe der Achse, wurde schon von Friedburg¹ als unwesentlich erkannt.

3.6.3 Näherungen im Rechenprogramm

Die im Rechenprogramm gemachten Näherungen betreffen die Ersetzung von kontinuierlichen Abhängigkeiten durch eine Anzahl diskreter Werte. Durch Testläufe mit immer feinerer Unterteilung wurde sichergestellt, daß von einer bestimmten Anzahl der Teilpunkte an keine wesentliche Änderung der Ergebnisse mehr eintrat; diese Unterteilung wurde dann gewählt.

Einmal wurden in der Maxwell-Verteilung nur endlich viele Geschwindigkeitswerte herangezogen und mit ihren Intensitätsbeiträgen summiert. Als äußerste Geschwindigkeiten wurden $v_0/10$ und $3v_0$ gewählt; diese Geschwindigkeiten haben nur noch ein geringes Gewicht. Es zeigte sich in Testläufen, daß eine Unterteilung dieses Intervalls in 60 Teilpunkte ($\Delta v = v_0/20$) eine genügend feine Rasterung darstellte.

Ebenso wurde durch Testläufe die notwendige Kantenlänge des kleinen Rasterquadrats, welches als Maß zum Auszählen der teilchenerfüllten Fläche in der (x', y') -Ebene benutzt wird, bestimmt. Sie wurde im Normalfall zu $\alpha_{\text{max}}(v_0)/10 \overset{= 0,0032}{\text{ge-}}$ wählt, gelegentlich noch kleiner.

Schließlich liegt eine gewisse Ungenauigkeit in der Ersetzung der Integration über die Detektorfläche Gl. (41) und (42), um den Gesamtfluß $\Phi(z)$ bzw. die Besetzung $B(z)$ zu berechnen, durch eine Summation Gl. (43). Dieser Fehler ist klein, wie durch Anwendung auf integrierbare Ersetzungsprofile gezeigt werden konnte.

3.7 Prüfung des Verfahrens

Das in den vorigen Abschnitten beschriebene Verfahren zur Berechnung der Intensitätsverteilung wurde an vier Stellen geprüft. Ausgangspunkt und Anlaß der Rechnungen waren experimentelle Ergebnisse, die Salsborn¹⁴ an der Erlanger Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen gewonnen hatte. Er fand die oben erwähnte annähernd scharfe Abbildung der Strahlquellenöffnung (Loch 3 mm $\varnothing$ und Kreisring 6 mm/4 mm $\varnothing$) an jeder Stelle z hinter dem Magneten. Diese qualitativen Ergebnisse ließen sich mit Berechnungen des Feldes $\varphi(r,z)$ erklären und wurden bereits anhand der Fig. 5 gedeutet.

Von Ebinghaus et al.⁵ liegen Messungen an einer Quelle polarisierter Lithiumionen vor. Die dabei aufgenommene Abhängigkeit des Ionenstroms von der Feldstärke H_0 des Sechspolmagneten (5, Abb. 12) ließ sich durch Berechnung der Besetzung $B(z)$ in Abhängigkeit von α_0^2 nachrechnen.

Becker und Fischer²⁵ berechneten den Fluß $\Phi(z)$ durch eine Detektorfläche im Spezialfall einer "Dünnen Linse". Diese Spezialisierung ließ sich auch hier nachvollziehen; damit wurden Strahlprofile (25, Abb. 7) und die Abhängigkeit des Gesamtflusses von der Detektorgröße (25, Abb. 3 und 11) nachgerechnet.

Schließlich wurden an der Erlanger Tandem-Quelle eigene Messungen mit einem ZnO-Kristall als Wasserstoffatom-detektor²⁶ durchgeführt. Und zwar wurden Strahlprofile $\varphi(r)$ an mehreren Stellen z bei Variation der Magnetfeldstärke H_0 aufgenommen, außerdem wurde die Abhängigkeit der Flußdichte auf der Achse $\varphi(0,z)$ von der Entfernung z gemessen. Diese Messungen wurden mit Berechnungen des Feldes $\varphi(r,z)$ verglichen; Fig. 15 zeigt als Beispiel Messungen der r -Abhängigkeit für vier Werte von z und der z -Abhängigkeit für $r = 0$ bei voller Magnetfeldstärke. In allen Fällen ergab sich eine gute Übereinstimmung, so daß die Verlässlichkeit des Verfahrens als gesichert gelten kann.

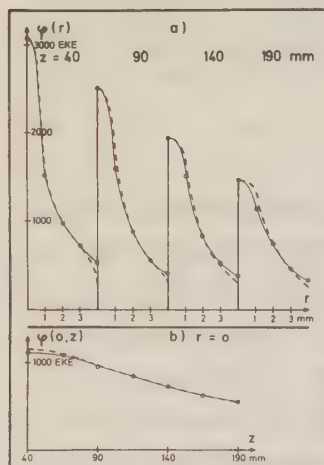


Fig. 15: a) Messungen von Strahlprofilen $\varphi(r)$ an verschiedenen Stellen ($z = 40, 90, 140$ und 190 mm) und Vergleich mit Rechnungen (gestrichelt); b) Messung der Flußdichte $\varphi(0,z)$ auf der Achse in Abhängigkeit von der Entfernung z und Vergleich mit Rechnungen (gestrichelt). Auf der Ordinate wurden die Messungen in willkürlichen Einheiten einer aufgestellten Eichkurve (EKE) aufgetragen; die Rechnungen wurden in a) bei $r = 0$, in b) bei $z = 190$ mm angepaßt.

4. ANWENDUNGEN

Dieses Kapitel bringt zwei Anwendungen der Rechnungen. Hauptziel der Arbeit war die rechnerische Optimalisierung des Ionenstroms der Erlanger Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen. Es zeigte sich, daß die Parameter experimentell schon nahezu optimal gewählt worden waren¹⁴. Es werden realisierbare Änderungen der Parameter a von 150 auf 70 mm, R_0 von 4 auf 5 mm und l_0 von 150 auf 220 mm vorgeschlagen, die insgesamt eine Steigerung des Ionenstroms um einen Faktor 1,7 erwarten lassen.

Weiterhin erwies sich als Ort einer zentralen Stopblende zur vollständigen Unterdrückung eines eventuellen molekularen Strahlanteils sowie der defokussierten Komponenten der Magneteingang als günstiger als der Magnetausgang.

4.1 Optimalisierung der Besetzung

In einer Quelle polarisierter Ionen möchte man aus einem Elektronenstoßionisierer einen möglichst hohen Ionenstrom erhalten; dieser wird bestimmt durch die Besetzung Gl. (42). Im Fall der Erlanger Tandem-Quelle soll der Ort des Ionisierers mit $z = 350$ mm, seine Öffnung mit 8 mm $\varnothing$ konstant gehalten werden; $B(z = 350 \text{ mm})$ für eine Detektorfläche von 8 mm $\varnothing$ soll mit $B_g(350)$ bezeichnet werden. Zur Optimalisierung werden die fünf Parameter r_0 , a , R_0 , l_0 , α_0 variiert. In den folgenden Abschnitten wird die Abhängigkeit von $B_g(350)$ von diesen Parametern diskutiert, erst einzeln, dann paarweise.

4.1.1 Diskussion der Abhängigkeit von den einzelnen Parametern

Zunächst wurde bei festgehaltenen übrigen Parametern jeder Parameter einzeln um den üblichen Arbeitspunkt (Pfeil) herum variiert. Fig. 16 bis 20 zeigen die Ergebnisse; aufgetragen ist jeweils die Besetzung $B_g(350)$, zum Vergleich der etwas andersartigen Abhängigkeit auch noch gestrichelt der Gesamtfluß $\Phi_g(350)$. Dieser wird aber nicht weiter diskutiert. Man erkennt, daß sowohl l_0 als auch α_0 bei festgehaltenem übrigen Parametersatz in der Nähe des Arbeitspunktes ein Maximum in $B_g(350)$ liefern, also nahezu optimal gewählt sind. Rechnerisch würde sich dagegen die Intensität steigern mit wachsender Quellenöffnung r_0 und wachsender Magnetöffnung R_0 , ebenso mit fallender Entfernung a . Diese Abhängigkeiten bleiben zu diskutieren.

Hinsichtlich r_0 (Fig. 16) ist zu bedenken, daß zwar das Rechenverfahren bei Vergrößerung der Quellenöffnung eine Steigerung liefert; dies beruht aber auf der Voraussetzung gleichbleibender Dichte im PR am Ort der Quelle. Im praktischen Fall kann diese aber bei Variation der Öffnung nicht konstant gehalten werden. Die Beschränkung bei Vergrößerung der Öffnung kommt vom Druck im ersten Pumpraum; hierdurch ist der gesamte Gasfluß durch die Fläche beschränkt. Bei festgehaltener Keulen-Winkelverteilung ($r_0/l = \text{const.}$, wobei l die Länge des Kanals ist) sinkt daher die Dichte im PR für eine größere Öffnung proportional $1/r_0^2$. In Fig. 21 ist die korrigierte Dichte im PR in die Abhängigkeit der Fig. 16 hineingefaltet worden. Man erkennt, daß die Besetzung nun ein Maximum durchläuft, das etwa bei $r_0 = 0,75$ mm liegt; der bisherige Arbeitspunkt $r_0 = 1,5$ mm ist allerdings nicht

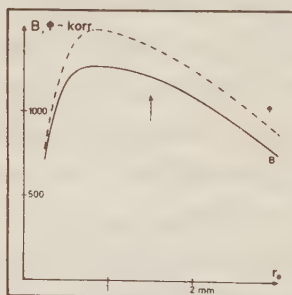
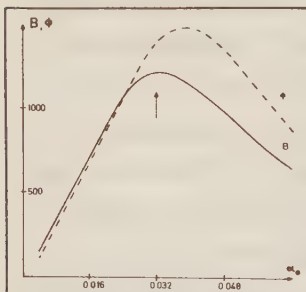
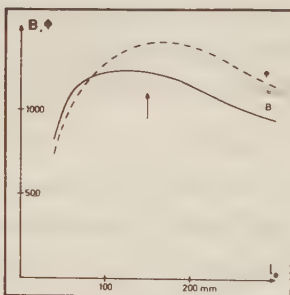
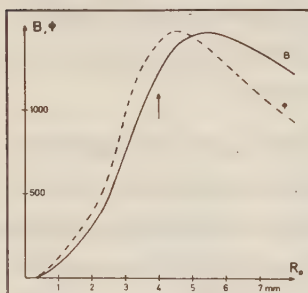
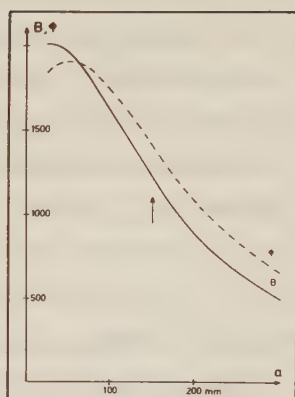
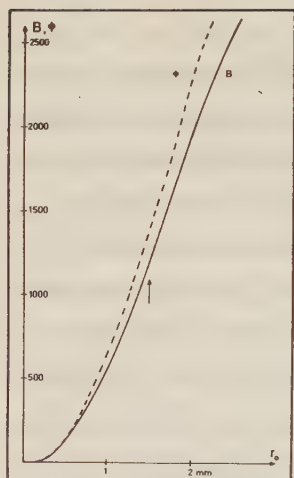


Fig. 16 bis 20: Besetzung $B_8(350)$ (durchgezogen) und Fluß $\phi_8(350)$ (gestrichelt) in Abhängigkeit von den Parametern r_0 , a , R_0 , l_0 und α_0 . Der Arbeitspunkt der Tandem-Quelle ist mit einem Pfeil bezeichnet.

Fig. 21: $B_8(350)$ und $\phi_8(350)$ (korrigiert) in Abhängigkeit von der Strahlquellenöffnung r_0 .

wesentlich schlechter.- Die Beschränkung bei Verkleinerung der Öffnung kommt vom Druck in der Entladungsröhre. Dieser müßte bei konstantem Gasfluß für eine kleinere Öffnung erhöht werden, wird aber ohnehin schon möglichst hoch gewählt. Diese Überlegung führt dazu, den gewählten Arbeitspunkt $r_0 = 1,5$ mm als optimal zu bezeichnen.

Bei R_0 (Fig. 18) würde eine Steigerung der Magnetöffnung (und damit der gleich großen zweiten Blende) auf $R_0 = 5,5$ mm die Intensität etwas erhöhen. Auch hier muß aber eine praktische Einschränkung gemacht werden: Die Voraussetzung, daß die übrigen Parameter konstant gehalten werden, ist nicht ohne weiteres erfüllbar. Mit R_0 ist von der technischen Ausführung her ja $\alpha_0 \sim \sqrt{H_0}$ gekoppelt: Eine Steigerung von R_0 würde zu einer Verminderung von H_0 führen, die durch Steigerung der Magneterregung nicht ausgeglichen werden könnte, da man ohnehin die größtmögliche Feldstärke (die durch die Eisensättigung begrenzt ist) einstellt. (Diese erweist sich zufälligerweise als optimal). Nach Fig. 14 a) sinkt $H_0 = H(R_0 = 5 \text{ mm})$ auf 93 % des Wertes für $R_0 = 4$ mm, damit würde α_0 auf 0,031 fallen. Die dadurch sich ergebende Intensitätsverminderung macht nun aber den Intensitätsgewinn durch Erhöhung von R_0 nicht völlig zunichte, so daß die Änderung des Parameters R_0 auf 5 mm wünschenswert bleibt.

Den größten Intensitätsgewinn könnte man durch Verkleinerung von a (Fig. 17) erzielen. Bei festgehaltenen übrigen Parametern wäre etwa $a = 20$ mm optimal. Hierdurch würde man die Magnetakzeptanz viel besser ausnutzen (vergl. Fig. 8). Aus vakuumtechnischen Gründen ist diese Forderung jedoch problematisch. Die Strecke a wird ja durch eine Trennwand in zwei Pumpräume geteilt, dabei herrscht im ersten Pumpraum wegen

des großen Gasanfalls aus der Strahlquelle, der nicht zum Strahl beiträgt und von der Pumpe weggepumpt werden muß, ein höherer Druck ($p_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Torr). Damit dieser Untergrund und ebenso der davon diffus in den zweiten Pumpraum einfallende Gasanteil weggepumpt werden kann, muß der freie Weg des Strahls zu beiden Seiten der Trennwand wenigstens 3 bis 4 cm lang sein; diese Überlegung fordert zumindest eine Entfernung $a = 60$ bis 80 mm. Dieser Wert würde immer noch eine beträchtliche Erhöhung der Intensität mit sich bringen.

4.1.2 Besetzung im mehrparametrischen Raum

Führt man die Änderung von a zu kleineren oder von R_0 zu größeren Werten aus, so erhebt sich die Frage, welche optimalen Werte dann die anderen Parameter annehmen. Diese Frage wurde durch gleichzeitige Variation zweier Parameter behandelt. Die Ergebnisse sind in den zweidimensionalen Parameterebenen als Höhenlinien in $B_g(350)$ aufgetragen, Fig. 22 bis 27. Bei der Diskussion wurde der Parameter r_0 ausgelassen, denn die im vorigen Abschnitt behandelte Abhängigkeit von praktischen Begrenzungen (Druck in der Strahlquelle und im ersten Pumpraum) bleibt bestehen; man kann ihn als von den übrigen Parametern entkoppelt betrachten.

Am eindeutigsten ist wieder die Abhängigkeit von a . In Verbindung mit jedem anderen Parameter sollte a stets verkleinert werden. Als Mindestlänge hatte sich oben $a = 60$ bis 80 mm ergeben; hier wird für die weitere Diskussion $a = 70$ mm zugrunde gelegt.

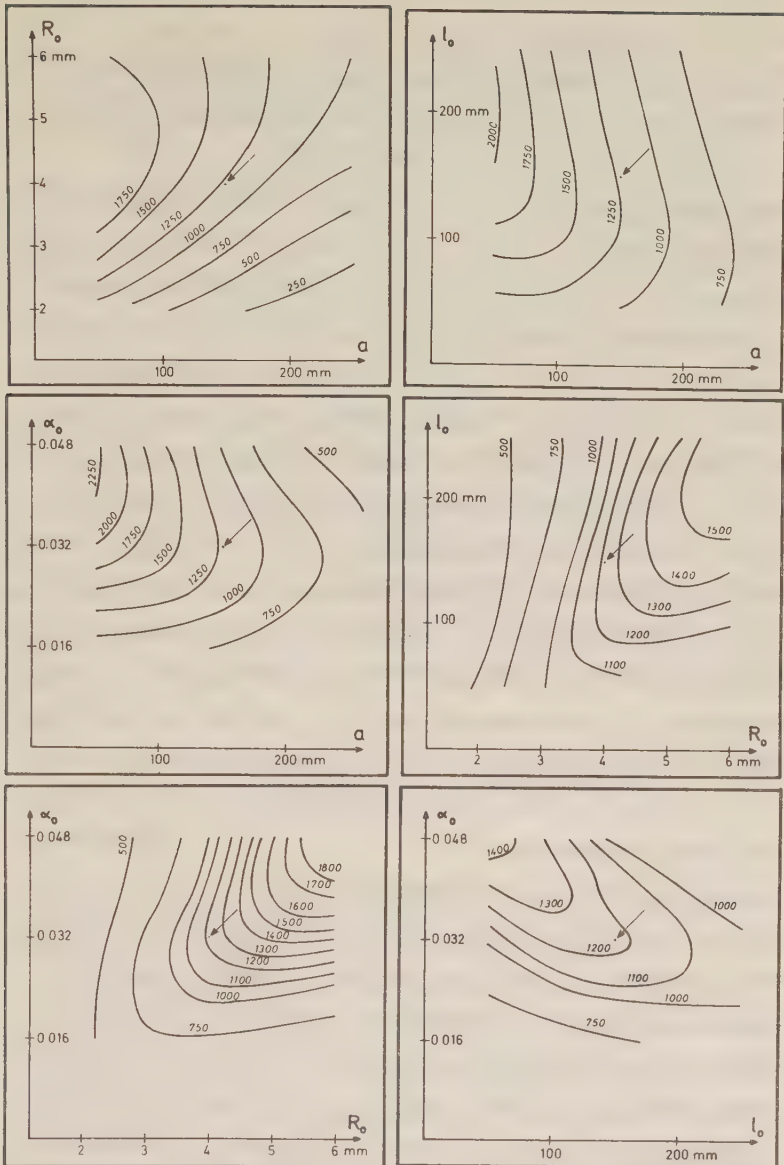


Fig. 22 bis 27: Höhenlinien von $B_8(350)$ in Abhängigkeit von je zwei Parametern.

Ähnlich eindeutig ist die Forderung nach einer Erhöhung von R_0 . In Verbindung mit $a = 70$ mm z. B. sollte $R_0 = 4,8$ mm sein. Allerdings muß man dann wieder eine geringe Verminderung des Magnetfeldes H_0 in Kauf nehmen, so daß z. B. für $R_0 = 5$ mm α_0 auf 0,031 sinkt.

Andererseits sollte auch α_0 eindeutig erhöht werden. In Verbindung mit $a = 70$ mm z. B. sollte $\alpha_0 = 0,048$, in Verbindung mit $R_0 = 4,8$ mm $\alpha_0 = 0,042$ sein. Diese Forderung ist aber wieder durch Steigerung der Erregung nicht erfüllbar; auch Änderung von R_0 nach oben oder unten könnte das Feld $H_0 = H(R_0)$ nicht steigern (vergl. Fig. 14 a). Da die bei Erhöhung von R_0 auf 5 mm sich ergebende Verminderung von α_0 auf 0,031 nicht sehr ins Gewicht fällt, erscheint dieser Kompromiß am günstigsten.

Der letzte Parameter l_0 zeigt kein so eindeutiges Verhalten. In Verbindung mit $a = 70$ mm sollte l_0 auf 180 mm, in Verbindung mit $R_0 = 5$ mm auf 190 mm erhöht werden. In Verbindung mit $\alpha_0 = 0,031$ dagegen sollte l_0 auf 130 mm vermindert werden; der Intensitätsgewinn wäre dabei aber geringer als im ersten Fall, so daß sich eine Erhöhung von l_0 auf 180 mm als günstiger erweist.

Mit den vorgeschlagenen Änderungen von a auf 70 mm, R_0 auf 5 mm, l_0 auf 180 mm (und der damit verbundenen Verminderung von α_0 auf 0,031) würde man aus den Diagrammen insgesamt eine Steigerung der Intensität um einen Faktor 1,4 bis 1,9 erwarten. Eine erneute Berechnung mit diesem Parametersatz ergab tatsächlich einen Faktor 1,6. Falls man aus Konstruktionsgründen $l_0 = 150$ mm beläßt, so gewinnt man immer noch einen Faktor 1,5.

4.1.3 Selbsttätige Optimalisierung

Am neuen Arbeitspunkt wurde ein Optimalisierungsprogramm zur selbsttätigen Parametervariation (OPTIS) angesetzt, wobei $r_0 = 1,5 \text{ mm}$, $a = 70 \text{ mm}$ und $\alpha_0 = 0,031$ festgehalten wurden. Die beiden anderen Parameter R_0 und l_0 wurden schrittweise so lange variiert, wie $B_g(350)$ stieg. Unabhängig von der Reihenfolge der Variation ergab sich der gleiche optimale Wert, der um einen Faktor 1,7 besser ist als der am bisherigen Arbeitspunkt, bei $R_0 = 5 \text{ mm}$ und $l_0 = 220 \text{ mm}$.

Schließlich wurde auch noch die defokussierte Komponente mit berücksichtigt, indem an Stelle von $B_g(\text{fok})$ die der Größe (Polarisation)² mal Ionenstrom proportionale Größe $A = (B_g(\text{fok}) - B_g(\text{defok}))^2 / (B_g(\text{fok}) + B_g(\text{defok}))$ optimiert wurde. Es ergaben sich keine Änderungen im besten Parametersatz mehr; bei $R_0 = 5 \text{ mm}$ und $l_0 = 220 \text{ mm}$ gewinnt man auch für A einen Faktor 1,7 gegenüber dem bisherigen Arbeitspunkt.

4.2 Stopblende zur Unterdrückung der defokussierten Komponente

Eine weitere Anwendung der Rechnungen ergab sich bei der Beantwortung der Frage, wo eine zentrale Stopblende, die einen eventuellen Molekularstrahl und damit auf jeden Fall auch die defokussierte Komponente vom Ionisierereingang abschirmt, angeordnet werden sollte. Zwei bevorzugte Orte kommen in Frage: Magneteingang oder -ausgang. Wenn beide Blenden denselben Effekt haben sollen, dann muß die Ausgangsblende größer sein als eine äquivalente Eingangsblende. Man erwartet, daß die kleinere Blende am Eingang den Strahl weniger schwächt; diese

Vermutung sollte geprüft werden. In Fig. 28 ist der Abfall der Intensität für wachsende Eingangs- und Ausgangsblende aufgetragen. Punkte gleicher Abschattung am Ort des Ionisierers sind gestrichelt verbunden. Möchte man die volle Ionisiereröffnung 8 mm $\varnothing$ abdecken, dann erweist sich tatsächlich eine Eingangsblende ($r_{Bl} = 2$ mm) als günstiger; bei weniger strenger Forderung (Abschattung 4 mm $\varnothing$) wäre eine Ausgangsblende ($r_{Bl} = 1,8$ mm) vorteilhafter.

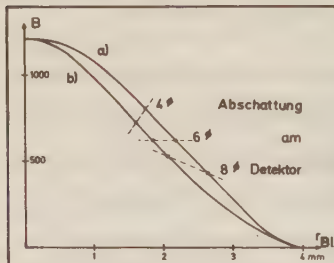


Fig. 28: B_{350} in Abhängigkeit vom Radius einer Stopblende a) am Magnetausgang, b) am Magneteneingang. Punkte gleicher Abschattung am Ionisiererort sind gestrichelt verbunden

5. ANHANG

In den folgenden Abschnitten finden sich Ergänzungen zu den vorigen Kapiteln; sie bringen die Ableitung von oben verwendeten Ergebnissen sowie den Vergleich der Intensitätsberechnungen mit Meßergebnissen und Rechnungen in Spezialfällen.

5.1 Ableitung der strahlenoptischen Eigenschaften

Die Ableitung der im Abschnitt 2.1 angegebenen Brennweite f des Sechspolmagneten sowie der Lage h der Hauptebenen macht vom Matrixformalismus²² Gebrauch.

Achsenabstand y_e und Richtung y'_e am Ende des Magneten folgen nach Gl. (6) aus den Werten (y_a, y'_a) am Anfang:

$$(61) \quad \begin{aligned} y_e &= y_a \cdot \cos l_0/s + y'_a \cdot s \cdot \sin l_0/s \\ y'_e &= -y_a/s \cdot \sin l_0/s + y'_a \cdot \cos l_0/s. \end{aligned}$$

Faßt man (y, y') als Vektor der (y, y') -Ebene auf, so schreiben sich die Gl. (61):

$$(62) \quad \begin{pmatrix} y_e \\ y'_e \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} y_a \\ y'_a \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix (M)

$$(63) \quad (M) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & s \cdot \sin \lambda \\ -1/s \cdot \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda = l_0/s$ die Transformation durch einen Sechspolmagneten für die fokussierte Komponente darstellt.

Achsenabstand und Richtung nach einem Laufraum der Länge l sind gegeben durch

$$(64) \quad \begin{aligned} y_2 &= y_1 + y'_1 \cdot l \\ y'_2 &= y'_1, \end{aligned}$$

werden also durch die Matrix (L)

$$(65) \quad (L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vermittelt. Dagegen stellt die Matrix (P)

$$(66) \quad (P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$$

oder im einzelnen ausgeschrieben:

$$(67) \quad \begin{aligned} y_2 &= y_1 \\ y_2' &= p \cdot y_1 + y_1' \end{aligned}$$

die Transformation durch eine dünne Linse dar; die Konstante p ist die negative Brechkraft der Linse: $p = -1/f$.

Durch Hintereinanderschalten der Transformation eines Laufraumes der Länge a vor dem Magneten, des Magneten selbst und eines Laufraumes der Länge z hinter dem Magneten erhält man die Transformation $(T_2) = (L_z)(M)(L_a)$

$$(68) \quad (T_2) = \begin{pmatrix} \cos \lambda - z/s \cdot \sin \lambda & s \cdot \sin \lambda + a \cdot \cos \lambda \\ & -z \cdot (a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda) \\ -1/s \cdot \sin \lambda & \cos \lambda - a/s \cdot \sin \lambda \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von (y_0, β) am Ort der Strahlquellenöffnung (vergl. Fig. 29) erreicht die Bahn an der Stelle z hinter dem Magneten den Achsenabstand

$$(69) \quad \begin{aligned} y(z) &= (\cos \lambda - z/s \cdot \sin \lambda) \cdot y_0 + \\ &\quad (s \cdot \sin \lambda + a \cdot \cos \lambda - z \cdot (a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda)) \cdot \beta. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun speziell diejenige Stelle $z = a'$, für die die zweite Klammer verschwindet:

$$(70) \quad a' = \frac{s \cdot \sin \lambda + a \cdot \cos \lambda}{a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda},$$

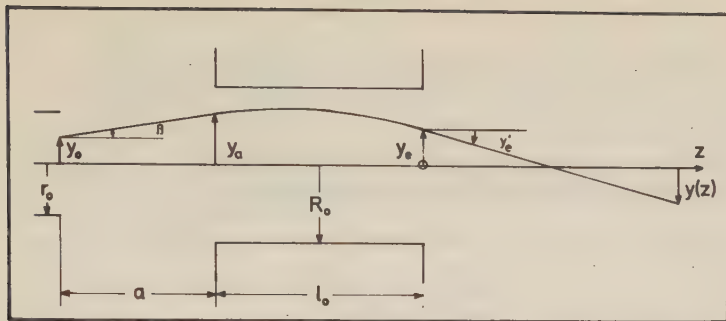


Fig. 29: Schematischer Längsschnitt mit Bezeichnungen.

so ist $y(a') = V \cdot y_0$ unabhängig vom Winkel β .

$$(71) \quad V = - \frac{1}{a/s \cdot \sin \lambda - \cos \lambda}$$

An der Stelle $z = a'$ liegt der Bildpunkt des Startpunktes in der Quellenöffnung; es liegt also eine Punkt-auf-Punkt-Abbildung mit der Vergrößerung V vor.

Um die Brennweite f und die Lage der Hauptebenen H_1 und H_2 zu gewinnen, wird der Magnet der Länge l_0 ersetzt durch ein äquivalentes System aus einem Laufrum der Länge h_1 vom Magneteingang bis zur 1. Hauptebene, dann eine dünne Linse der Brennweite f , an die sich ein weiterer Laufrum der Länge h_2 von der 2. Hauptebene bis zum Magnetausgang anschließt. Wegen Vorwärts-Rückwärts-Symmetrie ist $h_1 = h_2 = h$.

Spaltet man nun von der Matrix (M) der Abbildung durch den Magneten rechts und links eine Laufrummatrix (L_h) ab, so erhält man die eindeutige Zerlegung $(M) = (L_h)(P)(L_h)$:

$$(72) \quad (M) = \begin{pmatrix} 1 & s \cdot \tan \lambda/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/s \cdot \sin \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \cdot \tan \lambda/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus liest man $h = s \cdot \tan \lambda/2 = s \cdot \tan l_0/2s$ und $f = s/\sin \lambda = s/\sin (l_0/s)$ ab.

Für die defokussierte Komponente erhält man aus der Transformationsmatrix (M)

$$(73) \quad (M) = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & s \cdot \sinh \lambda \\ 1/s \cdot \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{pmatrix}$$

durch völlig analoge Betrachtungen die Ergebnisse für a' Gl. (11) und V. Gl. (12) sowie $h = s \cdot \tanh l_0/2s$ und $f = -s/\sinh(l_0/s)$.

Die Lage der Hauptebenen sowie die sich daraus ergebende Bildkonstruktion ist in Fig. 30 dargestellt.

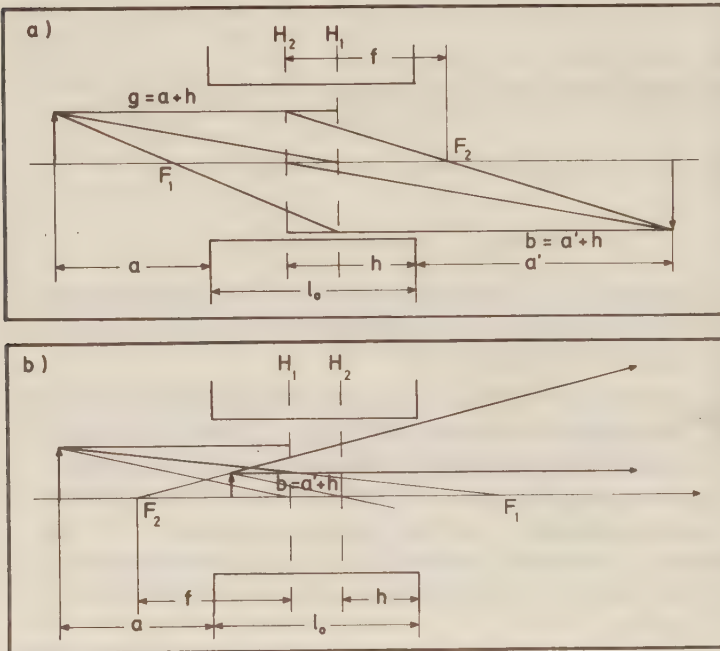


Fig. 30: Bildkonstruktion a) für die fokussierte Komponente, b) für die defokussierte Komponente.

Die Gültigkeit der Linsengleichung läßt sich ebenfalls einfach in der Matrixschreibweise nachweisen. Im Abbildungsfall $z = a'$ hat die Matrix (T_2) die Gestalt:

$$(74) \quad (T_2) = (L_{a'}) (M) (L_a) = (L_{a'}) (L_h) (P) (L_h) (L_a) \\ = (L_{a' + h}) (P) (L_{a + h}) = (L_b) (P) (L_g)$$

mit $g = a + h$, $b = a' + h$. Ausgeschrieben lautet (T_2)

$$(75) \quad (T_2) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + p.b & b + g + p.b.g \\ p & 1 + p.g \end{pmatrix}.$$

Im Abbildungsfall verschwindet das Matrixelement rechts oben, $b + g + p.b.g = 0$:

$$(76) \quad 1/b + 1/g = -p = 1/f.$$

(Das Element links oben stellt übrigens die Vergrößerung V dar:

$$(77) \quad V = 1 + p.b = 1 - b/f = -b/g.)$$

5.2 Berechnung der Intensitätsverteilung mit Zählverfahren

Eine andere Möglichkeit, die Intensitätsverteilung zu berechnen, als die in dieser Arbeit beschriebene Phasenraummethode besteht in der numerischen Verfolgung einzelner Bahnen, die jeweils einzeln als zur Intensität beitragend gezählt werden. Man benötigt allerdings eine große Anzahl solcher Bahnen, damit schließlich die Verteilung fein genug beschrieben wird.

Dieser Weg wurde anfangs hier beschritten. Alle möglichen Anfangsbedingungen einer Bahn - Startpunkt, Startrichtungen, Geschwindigkeit - wurden durch einige gleich wahrscheinliche repräsentative Werte ersetzt und jeder Wert einer Bedingung mit jedem aller anderen kombiniert. Alle Sätze von Anfangsbedingungen lieferten genau eine Bahn, die von der Strahlquelle durch den Magneten bis an die interessierende Stelle verfolgt wurde; sie wurde gezählt, wenn sie nirgends an ein Hindernis anstieß. Auf diese Weise erhält man numerische Ergebnisse der gesuchten Intensitätsverteilung. Damit diese aber glatt verläuft, muß die Rasterung der Anfangsbedingungen sehr fein sein; das bedeutet einen großen Rechenaufwand. Aus diesem Grunde wurde das Verfahren fallengelassen.

Günstiger als die gleichwahrscheinliche Rasterung der Anfangsbedingungen, von denen jede mit jeder anderen zu kombinieren ist, wäre die Monte-Carlo-Methode.

Hier verfolgt man ebenfalls eine große Anzahl von Bahnen einzeln, wählt aber (mit Hilfe von Zufallszahlen) die Anfangsbedingungen nacheinander entsprechend der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsverteilung, ohne jede mit jeder anderen zu kombinieren. Hat man z. B. vier Anfangsbedingungen, so würde beim Rasterverfahren eine Unterteilung mit je 10 Werten schon zu 10^4 zu verfolgenden Bahnen führen; das Ergebnis wäre aber noch sehr ungenau wegen der groben Rasterung. Beim Monte-Carlo-Verfahren dagegen würde man bei gleichem Rechenaufwand ein ungleich besseres Ergebnis erzielen: zuerst wählt man mit Hilfe von Zufallszahlen irgendeinen Wert der ersten Eigenschaft, dann der zweiten, dritten und vierten. Hat man hier 10^4 Bahnen verfolgt, so hat jede einzelne Eigenschaft ebenso viele verschiedene Werte angenommen, die mittlere Rasterung ist also tausendmal feiner. Dieser Vorteil der Monte-Carlo-Methode wird immer bedeutender, je mehr Anfangsbedingungen zu berücksichtigen sind.

In gewisser Hinsicht kann man sie daher als komplementär zur Phasenraummethode betrachten; denn für ein Strahltransportsystem mit sehr vielen Elementen gibt es meist auch viele Begrenzungen des PR, deren gemeinsame Koinzidenz abgefragt werden müßte. Hier steigt daher der Rechenaufwand der Phasenraummethode. Andererseits bietet diese den Vorteil einer weitgehend analytischen Lösung und damit einer größeren Genauigkeit.

5.3 Rechenprogramme

Auf den folgenden Seiten sind die Niederschriften der verwendeten Rechenprogramme (Programmsprache FORTRAN) wiedergegeben. Ausgangspunkt für alle späteren Varianten ist INTSIX mit dem Unterprogramm NF.

Fig. 31 zeigt das vereinfachte Flußdiagramm, Fig. 32 ein Beispiel für die Form der Ausgabe der Ergebnisse.

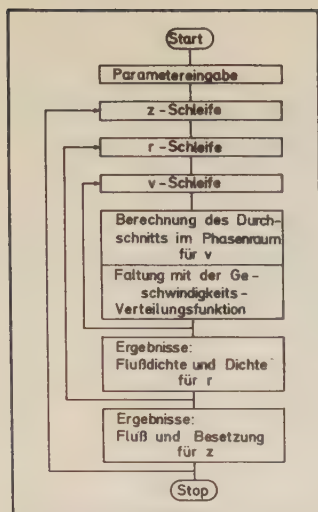


Fig. 31: Flußdiagramm des Rechenprogramms INTSIX zur Phasenraumintegration.

R =	0	177.9	179.4
R =	5	172.7	174.2
R =	10	154.4	155.1
R =	15	111.5	112.7
R =	20	71.0	66.2
R =	25	53.6	46.4
R =	30	41.4	36.4
R =	35	31.6	27.1
R =	40	21.1	15.1
Z = 150	1962.7	1845.5	
R =	0	74.9	64.3
R =	5	72.1	63.7
R =	10	71.1	61.7
R =	15	64.4	59.4
R =	20	54.8	51.9
R =	25	51.4	44.7
R =	30	34.5	29.6
R =	35	26.9	17.6
R =	40	21.0	11.7
Z = 350	1396.1	1215.7	

Fig. 32: Beispiel für Ergebnisse: Strahlprofile $\psi(r)$ und $\vartheta(r)$ für $r = 0, \dots, 4$ mm sowie integrale Werte $\phi(z)$ und $B(z)$ an den Stellen $z = 150$ und 350 mm am Arbeitspunkt der Erlanger Tandem-Quelle für die fokussierte Komponente.

Eine Variante des Programms (TESTIS) gestattet die Berechnung der Intensität, falls sich im Strahlengang an beliebiger Stelle eine zusätzliche Blende (Loch- oder Stopblende) befindet; dieselbe Möglichkeit bietet das Programm für den Spezialfall "Dünne Linse" (TISDL). Weitere Varianten des Programms vollziehen selbsttätig die Variation der Parameter (PARVIS für Variation eines Parameters, PARV2 für unabhängige Variation zweier Parameter). Hierbei sind die genannten Programme Rahmenprogramme, in denen die Parameter variiert werden und mit jedem Parametersatz das eigentliche Rechenprogramm (SUBRIS) aufgerufen wird. Ein Rahmenprogramm zur Optimalisierung (OPTIS) variiert vorgebbare Parameter selbstständig so lange, bis entweder $\phi(z)$ oder $B(z)$ einen optimalen Wert erreicht haben; für beide

Größen läßt sich auch der Einfluß der defokussierten Komponente mit berücksichtigen, indem die Größe (Polarisation)² mal Intensität optimalisiert wird (vergl. Abschnitt 5.8).

Von den Varianten TESTIS, SUBRIS und FIS zu INTSIX, TISDL zu TESTIS sowie NFTEST zu NF sind in der Niederschrift nur die wesentlich abweichenden Stellen wiedergegeben, ebenso von der Variante PARV2 des Rahmenprogramms PARVIS.

INTENSITAET SECHSPOLMAGNET

```

C      WILTE 28.11.66
C      PHASENRAUMINTEGRATION
      READ 3, 10, A,Z0,A0,K0,Q0
10     FORMAT (2F5.0, F7.5, 2F4.1)
      WRITE 2, 20, A,Z0,A0,K0,Q0
20     FORMAT (5H A = , F5.0/SHZ0 = , F5.0/SHQ0 = , F10.5/
S      SHK0 = , F6.1/SHQ0 = , F6.1)
C      A = ENTFERNUNG DER QUELLE VOM MAGNETEN
C      Z0 = LAENGE DES MAGNETEN
C      A0 = MAXIMAL AKZEPTABLER WINKEL FUEER V0
C      V0 = HAEUFIGSTE BESCHWINDIGKEIT IN DER QUELLE
C      K0 = OEFFNUNG DES MAGNETEN
C      Q0 = OEFFNUNG DER QUELLE
      WRITE 2, 30
30     FORMAT (19HMAGNETISCHES MOMENT)
      READ 1, 40, M
40     FORMAT (I4)
C      M = +1 FOKUSSIERTE KOMPONENTE
C      M = -1 DEFOKUSSIERTE KOMPONENTE
C      M = 0 BEIDE KOMPONENTEN
      WRITE 2, 50
50     FORMAT (/)
      RASTER=0.0032
      K02=K0*K0
      S0=A0/A0
      S=D0S=S0/20
      DIMENSION SIN(60),COS(60),SINH(60),EXP(60)
      DO 5 IS=1,60
      S=S+D0S
      SIN(IS)=SINF(U=Z0/S)
      COS(IS)=COSF(U)
      SINH(IS)=((U=EXPF(U))-1/U)/2
5     EXP(IS)=EXPF(-(U=S/50)*U)
      WRITE 2, 50
      Z=350.
      Z2=Z*Z
      ZF=ZH=0
      DO 55 IR=0,8
      K=0.5*IR
      K2=K*K
      ZF0=Z0=A
      S=D0S
      DO 45 IS=1,60
      S=S+D0S
      N=0
      IF (M) 25,15,15
15     SIN0=SIN(IS)
      COS0=COS(IS)
      V=1/(A*SIN0/S-COS0)
      DELTA=(S*SIN0+A*COS0)*V-Z
      W2=(U=S*S)+Z2
      Y0=R*(Z/W2+1/DELTA)
      Q=(V=Q0/DELTA*V)*V
      C=SQRTF(W=K02/W2*(U=ARCF(1-U*K2/W2/K02)))
      V=SQRTF(U)
      N=N+NF(RASTER,C,Q,Y0,W,V)
      IF (M) 25,25,35
25     SIN0=SINH(IS)
      COS0=SQRTF(1+SINH0*SINH0)

```

```

V=-1/(A*SINH(H/5)+COSH(H))
DELTA=((U=5*SINH(H))+A*COSH(H))*V-Z
W2=Z2
Y0=K*(1/Z+1/DELTA)
W=(V=W0/DELTA*V)*V
C=50K IF (W=K02/W2)
V=1.
N=N+NF(RASTER,C,W,Y0,W,V)
35 V=(U=5/50)*U
W=EXP(15)*V
ZFD=W*U*N+ZFD
45 ZD=W*N+ZD
WRITE 2, 60, K,ZFD,ZD
60 FORMAT (5H K = , F6.1, 2F8.1)
C R = ENTFERNUNG VON DER ACHSE
C ZFD = FLUSSDICHTE
C ZD = DICHTE
DIMENSION ZRFD(9),ZR0(9)
ZRFD(1K+1)=ZFD
55 ZR0(1K+1)=ZD
DO 65 IR=1,8
ZF=ZF+(IR-.5)*(ZRFD(IR)+ZRFD(IR+1))/2
65 ZB=ZB+(IR-.5)*(ZR0(IR)+ZR0(IR+1))/2
WRITE 2, 70, Z,ZF,ZB
70 FORMAT (/5H Z = , F6.1, 2F8.1)
C Z = ENTFERNUNG HINTER DEM MAGNETEN
C ZF = FLUSS 8 0
C ZB = BESETZUNG 8 0
75 WRITE 2, 50
STOP
END

```

ZAEHLFUNKTION NF

```

C WRITE 18.11.66
C DURCHSCHNITT IM PHASENRAUM
FUNCTION NF(RASTER,C,W,Y0,W,V)
NF=0
C1=(01=RASTER/2)-C
Y=C1
5 IF (Y-C) 15,15,75
15 XI2=W-(U=Y-Y0)*U
D=SQRT(W-Y*Y)/V
X=01
25 IF (X-D) 35,35,65
35 X2=X*X
IF (X2-XI2) 45,45,65
45 NF=NF+1
55 X=X+RASTER
GO TO 25
65 Y=Y+RASTER
GO TO 5
75 CONTINUE
RETURN
END

```

TEST INTENSITAET SECHSPOLMAGNET

C WITTE 28.11.66

C PHASENRAUMINTEGRATION

```

WRITE 2, 50
50  FORMAT (/)
    WRITE 2, 60
60  FORMAT (42HLENDE   +1 = LOCH   0 = NEIN   -1 = STOP)
    READ 1, 40, IBL
    WRITE 2, 50
    IF (IBL) 5,15,5
5   WRITE 2, 70
70  FORMAT (14HORT DER BLENDE/SH Z = )
    READ 1, 80, ZBL
80  FORMAT (F6.0)
    WRITE 2, 50
    WRITE 2, 90
90  FORMAT (19HOEFFNUNG DER BLENDE/SH R = )
    READ 1, 100, RBL
100 FORMAT (F4.1)
    WRITE 2, 50
15  CONTINUE
    RASTER=0.0032

```

```

N=0
IF (M) 125,35,35
35  SIN0=SIN(15)
    COS0=COS(15)
    V=1/(A*SIN0/S-COS0)
    DELTA=(S*SIN0+A*COS0)*V-Z
    W2=(U=S*S)+Z2
    Y0=R*(Z/W2+1/DELTA)
    Q=(V=00/DELTA*V)*V
    C=SQRTF(W=R02/W2*(U=ABSF(1-U*R2/W2/R02)))
    V=SQRTF(U)
    IF (IBL) 45,105,45
45  IF (ZBL) 55,85,85
55  IF (U1=ZBL+Z0) 65,65,75
65  A1=ABSF(U1)
    V1=1/(A1*SIN0/S-COS0)
    DELTA1=(S*SIN0+A1*COS0)*V1-Z
    GO TO 95
75  U1=ABSF(ZBL)/S
    SIN1=SINF(U1)
    COS1=COSE(U1)
    V1=-1/COS1
    DELTA1=S*SIN1*V1-Z
    GO TO 95
85  V1=1.
    DELTA1=ZBL-Z
95  Y1=R*(Z/W2+1/DELTA1)
    Q1=(V1=RBL/DELTA1*V1)*V1
105 N=NFTEST(RASTER,C,Q,Y0,Y1,IBL,W,V)
    IF (M) 125,125,205

```

```

125      SINHO=SINH(IS)
        COSHO=SQRTF(1+SINH0*SINH0)
        V=-1/(A*SINH0/S+COSHO)
        DELTA=((U=S*SINH0)+A*COSHO)*V-Z
        W2=Z2
        Y0=R*(1/Z+1/DELTA)
        Q=(V=Q0/DELTA*V)*V
        C=SQRTF(W=R02/W2)
        V=1.
        IF (IBL) 135,195,135
135      IF (ZBL) 145,175,175
145      IF (U1=ZBL+Z0) 155,165,165
155      A1=ABSF(U1)
        V1=-1/(A1*SINH0/S+COSHO)
        DELTA1=(S*SINH0+A1*COSHO)*V1-Z
        GO TO 185
165      U1=ABSF(ZBL)/S
        SINHI=((U1=EXPF(U1))-1/U1)/2
        COSHI=(U1+1/U1)/2
        V1=-1/COSHI
        DELTA1=S*SINHI*V1-Z
        GO TO 185
175      V1=1.
        DELTA1=ZBL-Z
185      Y1=R*(1/Z+1/DELTA1)
        Q1=(V1=RBL/DELTA1*V1)*V1
195      N=N+NFTEST(RASTER,C,Q,Y0,Q1,Y1,IBL,W,V)
205      CONTINUE
S        LFM          LAS          AND (I          SNA          JMP .215
206      CONTINUE
        WRITE 2, 40, N
215      CONTINUE
        V=(U=S/S0)*U
        W=EXP(IS)*V
        ZFD=W*U*N+ZFD
225      ZD=W*N+ZD

```

TEST INTENSITAET SECHSPOLMAGNET - DUENNE LINSE
C WITTE 28.11.66
C PHASENRAUMINTEGRATION

```

        N=0
        IF (M) 125,35,35
35      SIN0=SIN(IS)
        COS0=COS(IS)
        V=1/(A*SIN0/S-COS0)
        DELTA=((U=S*SIN0)+A*COS0)*V-Z
        W2=(U=U+Z*COS0)*U
        Y0=R*(COS0/U+1/DELTA)
        Q=(V=Q0/DELTA*V)*V
        C=SQRTF(W=R02/W2)
        V=1.

```

```
ZAEHLFUNKTION NFTEST
C      WITTE 18.11.66
C      DURCHSCHNITT IM PHASENRAUM
C      MIT BLENDE
      FUNCTION NFTEST(RASTER,C,Q,Y0,Q1,Y1,IBL,w,v)
      NFTEST=0
      C1=(D1=RASTER/2)-C
      Y=C1
5      IF (Y-C) 15,15,75
15     XI2=Q-(U=Y-Y0)*U
      XI2L2=Q1-(U=Y-Y1)*U
      D=SQRTF(w-Y*Y)/V
      IF (IBL) 22,24,24
22     IF (XI2L2) 24,24,23
23     X=SQRTF(XI2L2)+D1
      GO TO 25
24     X=D1
25     IF (X-D) 35,35,65
35     X2=X*X
      IF (X2-XI2) 45,45,65
45     IF (IBL) 85,85,95
95     IF (X2-XI2L2) 85,85,65
85     NFTEST=NFTEST+1
      X=X+RASTER
      GO TO 25
65     Y=Y+RASTER
      GO TO 5
75     CONTINUE
      RETURN
      END
```

PARAMETERVARIATION INTENSITAET SECHSPOLMAGNET EINFACH

```

C      WITTE 1.2.67
      READ 3, 30, A,Z0,A0,R0,Q0
30     FORMAT (2F5.0, F7.5, 2F4.1)
      WRITE 2, 40, A,Z0,A0,R0,Q0
40     FORMAT (16HPARAMETER NUMMER/
$      9H 1 A = , F5.0/9H 2 Z0 = , F5.0/9H 3 A0 = , F10.5/
$      9H 4 R0 = , F6.1/9H 5 Q0 = , F6.1)
C      A = ENTFERNUNG DER QUELLE VOM MAGNETEN
C      Z0 = LAENGE DES MAGNETEN
C      A0 = MAXIMAL AKZEPTABLER WINKEL FUER V0
C      V0 = HAEUFIGSTE GESCHWINDIGKEIT IN DER QUELLE
C      R0 = OEFFNUNG DES MAGNETEN
C      Q0 = OEFFNUNG DER QUELLE
      WRITE 2, 50
50     FORMAT (19HMAGNETISCHES MOMENT)
      READ 1, 60, M
60     FORMAT (I4)
C      M = +1 FOKUSSIERTE KOMPONENTE
C      M = -1 DEFOKUSSIERTE KOMPONENTE
C      M = 0 BEIDE KOMponentEN
      WRITE 2, 130
      DIMENSION P(5)
      P(1)=A
      P(2)=Z0
      P(3)=A0
      P(4)=R0
      P(5)=Q0
      WRITE 2, 80
80     FORMAT (31HNUMMER DES VARIABLEN PARAMETERS)
      READ 1, 60, I
      WRITE 2, 130
      WRITE 2, 100
100    FORMAT (27HRELATIVE PARAMETERAENDERUNG)
      READ 1, 60, J
      DP=P(I)/J
      WRITE 2, 130
130    FORMAT (/)
      WRITE 2, 130
      L=2*J
      DO 15 K=1,L
      P(I)=K*DP
      WRITE 2, 140, I,P(I)
140    FORMAT (16HPARAMETER NUMMER/
$      I2,5X,2H= ,F10.5)
      WRITE 2, 130
15     CALL SUBRIS (M,P(1),P(2),P(3),P(4),P(5))
      STOP
      END
  
```

PARAMETERVARIATION INTENSITAET SECHSPOLMAGNET DOPPELT
C WITTE 1.2.67

```

      WRITE 2, 80
80    FORMAT (31HNUMMERN DER VARIABLEN PARAMETER)
      READ 1, 60, I1
      WRITE 2, 130
      READ 1, 60, I2
      WRITE 2, 130
      WRITE 2, 100
100   FORMAT (29HRELATIVE PARAMETERAENDERUNGEN)
      READ 1, 60, J1
      DP1=P(I1)/J1
      WRITE 2, 130
      READ 1, 60, J2
      DP2=P(I2)/J2
      WRITE 2, 130
130   FORMAT (/)
      WRITE 2, 130
      DO 15 K1=1,5
      P(I1)=K1*DP1
      DO 15 K2=1,5
      P(I2)=K2*DP2
      WRITE 2, 140, (P(K), K=1,5)
140   FORMAT (F10.5)
      WRITE 2, 130
15    CALL SUBRIS (M, P(1),P(2),P(3),P(4),P(5))
      STOP
      END

```

SUBROUTINE INTENSITAET SECHSPOLMAGNET
C WITTE 1.2.67
C PHASENRAUMINTEGRATION
SUBROUTINE SUBRIS(M,A,Z0,A0,R0,Q0)
RASTER=0.0032

```

      WRITE 2, 70, Z,ZF,ZB
70    FORMAT (/5H Z = , F6.1, 2F8.1)
75    WRITE 2, 50
      RETURN
      END

```

OPTIMALISIERUNG INTENSITÄT SECHSPOLMAGNET

```

C      WITTE 8.12.66
C      PARAMETERVARIATION
      READ 3, 10, Z
10     FORMAT (F5.0)
      WRITE 2, 20
20     FORMAT (21HZAHLSSTREIFEN WECHSELN)
      PAUSE
      READ 3, 30, A, Z0, A0, R0, Q0
30     FORMAT (2F5.0, F7.5, 2F4.1)
      WRITE 2, 40, Z, A, Z0, A0, R0, Q0
40     FORMAT (5H Z = , F5.0/16HPARAMETER NUMMER/
$      9H 1 A = , F5.0/9H 2 Z0 = , F5.0/9H 3 A0 = , F10.5/
$      9H 4 R0 = , F6.1/9H 5 Q0 = , F6.1)
C      Z = ENTFERNUNG HINTER DEM MAGNETEN
C      A = ENTFERNUNG DER QUELLE VOM MAGNETEN
C      Z0 = LÄNGE DES MAGNETEN
C      A0 = MAXIMAL AKZEPIABLER WINKEL FÜR V0
C      V0 = HÄUFIGSTE GESCHWINDIGKEIT IN DER QUELLE
C      R0 = OEFFNUNG DES MAGNETEN
C      Q0 = OEFFNUNG DER QUELLE
      WRITE 2, 50
50     FORMAT (19HMAGNETISCHES MOMENT)
      READ 1, 60, M
60     FORMAT (I4)
C      M = +1 FOKUSSIERTE KOMPONENTE
C      M = -1 DEFOKUSSIERTE KOMPONENTE
C      M = 0 BEIDE KOMPONENTEN
      WRITE 2, 130
      WRITE 2, 70
70     FORMAT (19HMAXIMALISIERUNG AUF/
$      17H1 = FLUSS  $\Phi$  (Z)/
$      21H2 = BESETZUNG  $\Phi$  (Z))
      READ 1, 60, NZ
      WRITE 2, 130
      DIMENSION IJ(5), KL(5), MN(5), P(5), DP(5), R(5)
      P(1)=A
      P(2)=Z0
      P(3)=A0
      P(4)=R0
      P(5)=Q0
      WRITE 2, 80
80     FORMAT (30HANZAHL DER VARIABLEN PARAMETER)
      READ 1, 60, I
      WRITE 2, 130
      WRITE 2, 90
90     FORMAT (31HNUMMERN DER VARIABLEN PARAMETER)
      DO 5 J=1,I
      READ 1, 60, KL(J)
      WRITE 2, 130
      IJ(KL(J))=0
5      R(KL(J))=P(KL(J))
      WRITE 2, 100
100    FORMAT (29HRELATIVE PARAMETERÄNDERUNGEN)
      DO 15 J=1,I
      READ 1, 60, MN(KL(J))
      WRITE 2, 130
15     DP(KL(J))=P(KL(J))/MN(KL(J))
      L=I+1
      IF (L-5) 25,25,45

```

```

25      WRITE 2, 110
110     FORMAT (28HNUMMERN DER FESTEN PARAMETER)
        DO 35 J=L,5
          READ 1, 60, KL(J)
          %WRITE 2, 130
          IJ(KL(J))=KL(J)
35      R(KL(J))=P(KL(J))
45      WRITE 2, 130
        FM=FISOPT(M,NZ,Z,P(1),P(2),P(3),P(4),P(5))
        WRITE 2, 120, (P(N), N=1,5), F0
120     FORMAT (5F10.5, 5X, F8.1)
55      WRITE 2, 130
130     FORMAT (/)
        DO 135 J=1,I
          DO 65 K=1,I
            IF (KL(J)-IJ(K)) 65,135,65
65      CONTINUE
          R(KL(J))=P(KL(J))+DP(KL(J))
          F1=FISOPT(M,NZ,Z,R(1),R(2),R(3),R(4),R(5))
          IF (F1-F0) 75,75,85
75      R(KL(J))=P(KL(J))-DP(KL(J))
          F1=FISOPT(M,NZ,Z,R(1),R(2),R(3),R(4),R(5))
          IF (F1-F0) 105,105,95
85      F0=F1
          WRITE 2, 120, (R(N),N=1,5),F0
          R(KL(J))=R(KL(J))+DP(KL(J))
          F1=FISOPT(M,NZ,Z,R(1),R(2),R(3),R(4),R(5))
          IF (F1-F0) 115,115,85
95      F0=F1
          WRITE 2, 120, (R(N),N=1,5),F0
          R(KL(J))=R(KL(J))-DP(KL(J))
          F1=FISOPT(M,NZ,Z,R(1),R(2),R(3),R(4),R(5))
          IF (F1-F0) 125,125,95
105     R(KL(J))=P(KL(J))
        GO TO 135
115     R(KL(J))=R(KL(J))-DP(KL(J))
        GO TO 135
125     R(KL(J))=R(KL(J))+DP(KL(J))
135     CONTINUE
        K=0
        DO 165 J=1,I
          IF (P(KL(J))) 155,145,155
145     W=W+(V=R(KL(J))/DP(KL(J)))*V
        GO TO 165
155     W=W+(V=(R(KL(J))-P(KL(J)))/P(KL(J)))*V
165     P(KL(J))=R(KL(J))
          IF (W-0.000001) 175,175,55
175     K=I
          DO 195 J=1,I
            DP(KL(J))=DP(KL(J))/MN(KL(J))
            IF (DP(KL(J))/P(KL(J))-0.01) 185,195,195
185     IJ(KL(J))=KL(J)
            K=K-1
195     CONTINUE
          IF (K) 205,205,55
205     STOP
        END

```

FISOPT

```

FUNCTION FISOPT(M,NZ,Z,A,Z0,A0,R0,Q0)
C      OPTIMALISIERUNG AUF P*P*I
C      WITTE 12.1.67
      P=Q=0
      IF (M) 15,5,5
5      P=FIS(+1,NZ,Z,A,Z0,A0,R0,Q0)
      IF (M) 15,15,25
15     Q=FIS(-1,NZ,Z,A,Z0,A0,R0,Q0)
25     C=P+Q
      D=P-Q
      FISOPT=D*D/C
      RETURN
      END

```

FUNKTION INTENSITAET SECHSPOLMAGNET

```

C      WITTE 28.11.66
C      PHASENRAUMINTEGRATION
FUNCTION FIS(M,NZ,Z,A,Z0,A0,R0,Q0)
      RASTER=0.0032

      DO 65 IR=1,8
        ZF=ZF+(IR-.5)*(ZRFD(IR)+ZRFD(IR+1))/2
65      ZB=ZB+(IR-.5)*(ZRFD(IR)+ZRFD(IR+1))/2
        IF (NZ-1) 75,75,85
75      FIS=ZF
        GO TO 95
85      FIS=ZB
95      RETURN
      END

```

5.4 Winkelverteilung der Strahlquellenöffnung

Im Abschnitt 3.6.1 wurde für eine ideale cos-Verteilung der aus der Strahlquellenöffnung austretenden Atome die Unabhängigkeit der Dichte im PR vom Winkel α gegen die Achse für alle in Betracht kommenden Winkel $\alpha \leq \alpha_{\max}$ gezeigt. Für realistische Keulen-Winkelverteilungen wird der Nachweis hier nachgetragen.

Zugenmaier¹⁹ berechnete die Winkelverteilung von Atomen, die einen Kanal der Länge l vom Radius r_0 unter dem Winkel α gegen die Achse verlassen; im Molekularströmungsbereich gilt:

$$(78) \quad d\Phi^*(\alpha)/d\Omega = \Phi^*/2\pi \cdot (1 + k/\pi \cdot R(p)) \cdot \cos \alpha;$$

dabei ist k ein Geometriefaktor:

$$(79) \quad k = 1/\gamma \cdot \frac{1}{1/3 + 2u}$$

mit der Abkürzung $u = 1/\gamma \cdot (1/4 + (1 - \sqrt{(1 + \gamma^2)^3})/6\gamma^2)$ und $\gamma = 2r_0/l$ das Öffnungsverhältnis; $R(p)$ ist eine Korrekturfunktion der Variablen $p = \tan \alpha/\gamma$:

$$(80) \quad R(p) = \arccos p - p \cdot \sqrt{1 - p^2} + 2/3p \cdot (1 - \sqrt{(1 - p^2)^3})$$

für $p \leq 1$,

$$R(p) = 2/3p$$

für $p \geq 1$.

Im aktuellen Fall mit $r_0 = 1,5$ mm, $l = 5$ mm ist $\gamma = 0,6$ und daher $u = 0,87$ und $k = 0,80$. Für kleine Winkel α wird daher p klein: $p \approx \alpha/\gamma$. Setzt man dies in $R(p)$ ein und vernachlässigt höhere als lineare Glieder in p , so verbleibt:

$$(81) \quad R(p) \approx \arccos p = \pi/2 - \arcsin p \approx \pi/2 - p.$$

Dann nimmt die Winkelverteilung Gl. (78) die Form an:

$$(82) \quad d\Phi^*(\alpha)/d\Omega = \Phi^*/2\pi \cdot (1 + k/\pi \cdot (\pi/2 - \alpha/\gamma)) \cdot \cos \alpha$$

$$= \Phi^*/2\pi \cdot (1 + k/2 - k/\pi \cdot \alpha/\gamma) \cdot \cos \alpha$$

$$= \phi^*/2\pi \cdot (1 - 0,3 \cdot \alpha) \cdot \cos \alpha.$$

Für $\alpha \leq \alpha_{\max}(v_0) = 0,032$ hat diese Verteilung nun tatsächlich in guter Näherung einen konstanten Wert.

5.5 Vergleich der Rechnungen mit bisherigen Ergebnissen

In diesem Abschnitt wird die oben erwähnte Prüfung des Rechenverfahrens anhand vorliegender Messungen und Rechnungen im einzelnen durchgeführt.

5.5.1 Qualitative Ergebnisse an einer Quelle polarisierter Wasserstoffionen

Salzborn¹⁴ hatte beim Aufbau der Erlanger Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen festgestellt, daß der Sechspolmagnet abbildende Eigenschaften besitzt, obwohl im Atomstrahl wegen der Maxwell-Verteilung alle möglichen Geschwindigkeiten vertreten sind. Er fand ein etwas verschmiertes Bild der Strahlquellenöffnung an jeder Stelle z hinter dem Magneten, das mit wachsender Entfernung linear auseinanderlief; der Schnittpunkt der Bildbegrenzungen lag zurückverlängert im Innern des Magneten. Dieses Ergebnis läßt sich aus der berechneten Flußdichteverteilung Fig. 11 direkt ablesen und wurde bereits anhand der Fig. 5 gedeutet.

Weiterhin wurde von Salzborn die Abbildung eines Kreisringes (mit sechs Löchern) gezeigt; durch Verstopfen eines der Löcher ließ sich zeigen, daß das Bild auf dem Kopf stand. Bei einer Entfernung von $z \approx 180$ mm hinter dem Magneten lag eine 1:1-Abbildung vor. Diese Eigenschaften lassen sich nachrechnen, wenn man den Kreisring als Differenz zweier verschieden großer Quellenöffnungen nachbildet. Man sieht in Fig. 33 wieder das Auseinanderlaufen des Bildes, das etwa an der Stelle $z \approx 160$ mm die Größe des Gegenstandes hat, und findet die annähernde Abbildung des Kreisringes bestätigt. Die Tatsache, daß das Bild auf dem Kopf steht, folgt aus Gl. (9).

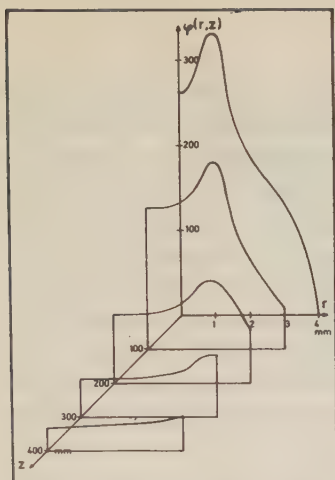


Fig. 33: Flußdichteverteilung $\psi(r, z)$ am Arbeitspunkt der Erlanger Tandem-Quelle bei einer kreisringförmigen Strahlquellenöffnung ($r_0 = 3 \text{ mm}/2 \text{ mm}$).

5.5.2 Messungen an einer Quelle polarisierter Lithiumionen

Von Ebinghaus et al.⁵ wurde eine Quelle polarisierter Lithiumionen nach der Atomstrahlmethode gebaut, auf deren Ergebnisse sich die Berechnung der Dichteverteilung anwenden ließ. Hauptmerkmale der Apparatur sind die Verwendung eines Lavalstrahls sowie ein zwischen dem Sechspolmagneten und dem Elektronenstoßionisierer eingebauter Geschwindigkeitsselektor, welcher die Möglichkeit bietet, nur einen schmalen Bereich aus der Geschwindigkeitsverteilung des Strahls zur Abbildung durch den Magneten heranzuziehen.

Fig. 34 (⁵, Abb. 12 c) zeigt den für eine bestimmte Durchlaßgeschwindigkeit gemessenen Ionenstrom ($^7\text{Li}^+$) in Abhängigkeit von der Feldstärke H_0 . Die beiden Maxima entstehen, wenn die fokussierten Atome etwa eine halbe bzw. eine ganze Sinusschwingung im Magneten durchlaufen haben. Gestrichelt ist das Ergebnis der Berechnung von B für eine einzelne Geschwindigkeit eingezeichnet. Die Gründe für die auftretenden Abweichungen lassen sich im einzelnen angeben. Das zweite Maximum zunächst liegt genau an der richtigen Stelle, der Maßstab der Abszisse wurde nicht angepaßt, sondern absolut berechnet. Das erste Maximum jedoch erscheint in der Messung bei größeren Feldstärken als berechnet. Dies ist auf den Anteil der gemischten Zustände des ^7Li zurückzuführen. Da ^7Li den Kernspin $3/2$ und den Hüllenspin $1/2$ hat, gibt es insgesamt acht Unterzustände. Nur zwei haben konstantes magnetisches Moment (einer

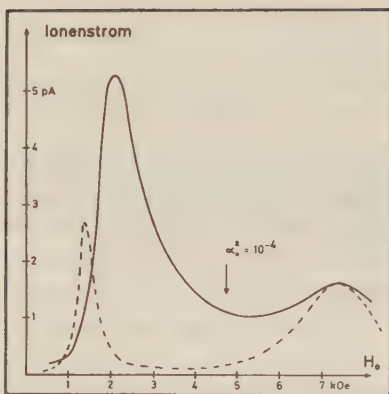


Fig. 34: ⁽⁵⁾, Abb. 12 c): Messung der Abhängigkeit des Ionenstroms vom Magnetfeld H_0 für eine feste Geschwindigkeit ($v_0 = 2750$ m/s). Gestrichelt: Berechnung von B_1 mm ϕ ($z = 600$ mm) mit $r_0 = 0,25$ mm, $a = 25$ mm, $R_0 = 2,5$ mm, $l_0 = 1000$ mm; an der Stelle $z = -900$ mm befindet sich eine zusätzliche Lochblende von 1 mm ϕ , bei $z = 0$ eine Blende von 3 mm ϕ .

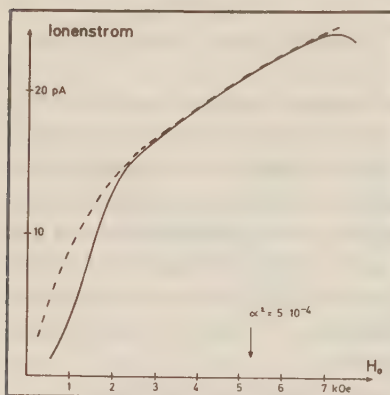


Fig. 35: ⁽⁵⁾, Abb. 12 a): Messung der Abhängigkeit des Ionenstroms vom Magnetfeld H_0 für einen Strahl von Molekularstrahlcharakter und Vergleich mit Rechnungen. Gestrichelt: Berechnung von B_3 mm ϕ ($z = 160$ mm) mit $r_0 = 0,5$ mm und einer Blende bei $z = -900$ mm von 3 mm ϕ ; übrige Parameter wie in Fig. 34.

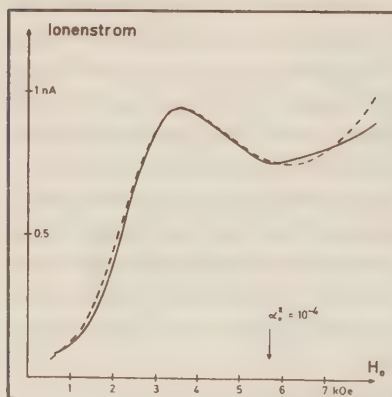


Fig. 36: ⁽⁵⁾, Abb. 12 b): Messung der Abhängigkeit des Ionenstroms vom Magnetfeld H_0 für einen Lavalstrahl und Vergleich mit Rechnungen. Gestrichelt: Berechnung von $B_3(160)$ mit denselben Parametern wie in Fig. 35.

davon wird defokussiert), von den übrigen wird die Hälfte bei kleiner Magnetfeldstärke schwächer als berechnet fokussiert (die andere Hälfte schwächer als berechnet defokussiert). Man erwartet für diese Komponenten das Maximum erst bei höherer Feldstärke.- Weiterhin ist das erste Maximum im Vergleich zum zweiten zu niedrig berechnet. Nun läßt der Geschwindigkeitsselektor aber nicht genau eine einzige Geschwindigkeit allein durch, sondern einen ganzen Bereich (berechnete Halbwertsbreite $\Delta v/v = 0,3$; die genaue Durchlaßfunktion ist nicht bekannt). Wenn man mehrere berechnete Kurven für benachbarte Geschwindigkeiten überlagert, so würde die Abweichung zurückgehen: das erste Maximum würde stark erhöht, das zweite im wesentlichen verbreitert werden.

Zwei weitere Messungen des Ionenstroms in Abhängigkeit vom Magnetfeld H_0 bei verschiedenen Strahlbedingungen wurden von Ebinghaus et al. ohne Geschwindigkeitsselektor durchgeführt. Fig. 35 (⁵, Abb. 12 a) zeigt eine Messung für einen Strahl von Molekularstrahlcharakter (mit Maxwell-Verteilung); gestrichelt eine Berechnung von B für diesen Fall. Der Abszissenmaßstab wurde wieder berechnet, nicht angepaßt. Die Abweichung bei kleiner Magnetfeldstärke ist wie oben auf die schwächer fokussierten Komponenten zurückzuführen; der Anstieg mit größerer Feldstärke wird gut wiedergegeben.

Fig. 36 (⁵, Abb. 12 b) zeigt denselben Zusammenhang für einen Lavalstrahl. Eine Messung der Geschwindigkeitsverteilung für einen Lavalstrahl (⁵, Abb. 5) legt nahe, diese durch eine verschobene Maxwell-Verteilung anzunähern. In Fig. 36 ist gestrichelt eine Berechnung von B mit einer relativen Verschiebung $\Delta v/v_0 = 0,7$ eingezeichnet. Die Hauptmerkmale der gemessenen Kurve werden gut wiedergegeben; für Details ist wohl die Geschwindigkeitsverteilung nur ungenügend approximiert.

5.5.3 Berechnung der Intensitätsverteilung in Spezialfällen

Von Becker und Fischer²⁵ wurden Berechnungen der Intensität hinter einem Sechspolmagneten in einem Spezialfall durchgeführt. Sie betrachten den Magneten als "Dünne Linse", d.h. sie benutzen die Näherung $l_0/s \ll 1$; außerdem gehen sie von

einer punktförmigen Strahlquelle aus: $r_0 \ll R_0$; schließlich galt ihr Interesse in erster Linie dem Gesamtfluß Φ durch die Detektorfläche. Zur ausführlichen Erläuterung der benutzten Methode sei auf die Originalarbeit verwiesen. Kurz gesagt, berechnen die Autoren den von einer bestimmten Linsenzone $R \dots R + \Delta R$ auf die Detektorfläche fokussierten Geschwindigkeitsbereich $v_{\min} \dots v_{\max}$ und integrieren die Geschwindigkeitsverteilung nur über diesen Bereich. Dann summieren sie die Beiträge aller Linsenzonen bis zum äußeren Radius R_0 der Magnetöffnung auf.

Die verwendeten Näherungen lassen sich nun auch bei dem in dieser Arbeit geschilderten Verfahren durch Spezialisierung nachvollziehen. Dabei kann die Begrenzung im PR, die durch die Magnetakzeptanz gegeben ist, fallengelassen werden, denn im Fall einer dünnen Linse gibt es ja keine anstoßenden Bahnen; an ihre Stelle hat dann die Begrenzung durch die Blende am Magneteingang Gl. (25) zu treten, die bisher als weniger streng fortgelassen werden konnte.

Mit diesen Änderungen (Programmvariante TISDL) wurden aus der genannten Arbeit²⁵ einige Zusammenhänge nachgerechnet, wie sie dort in den Abb. 3, 7 und 11 dargestellt sind.

Fig. 37 stellt den "Linsenwirkungsgrad" P_1 dar, definiert als das Verhältnis des auf den Detektor fallenden Flusses der fokussierten Komponente zum auf den Magneten fallenden Fluß; bei konstanter Entfernung a ist diese Größe dem Fluß allein proportional, sie wird daher hier direkt mit Φ verglichen. Sie ist gegen die der Detektoröffnung r_d proportionale dimensionslose Größe $\delta = a^2 / (a^2 + b^2) \cdot r_d / R_0$ aufgetragen. P_2 ist der Linsenwirkungsgrad für die defokussierte Komponente, $P = P_1 - P_2$.

Fig. 38 zeigt denselben Zusammenhang für den Fall, daß eine zentrale Stopblende eingeführt wird, die den direkten Strahl (z. B. nicht abgelenkte H_2 -Moleküle) genau abdeckt. Der Radius dieser Blende muß $r_{Bl} = a^2 / (a^2 + b^2) \cdot r_d$ sein, daher ist dann $\delta = r_{Bl} / R_0$. Für $\delta = 1$ bedeckt die Zentralblende die gesamte Magnetöffnung R_0 .

Fig. 39 schließlich zeigt Strahlprofile für die fokussierte und die defokussierte Komponente. In allen Fig. ist als durchgezogene Kurve die Berechnung von Becker und Fischer,

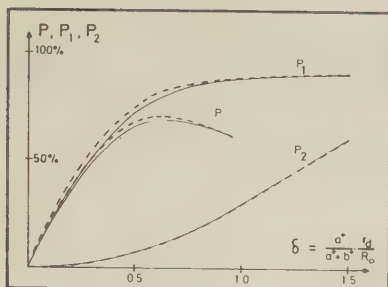


Fig. 37: (²⁵, Abb. 3): Abhängigkeit des "Linsenwirkungsgrades" P_1 (fok. Komp.), P_2 (defok. Komp.) und $P = P_1 - P_2$ vom Detektorradius r_d und Vergleich mit Rechnungen. Gestrichelt: Berechnung von $\Phi(z = 235 \text{ mm})$ mit $r_0 = 0,2 \text{ mm}$, $a = 75 \text{ mm}$, $R_0 = 2 \text{ mm}$, $l_0 = 10 \text{ mm}$, $\alpha_0 = 0,1$.
 $a^+ = a + l_0/2$ und $b^+ = z + l_0/2$ rechnen bis zur Magnetmitte.

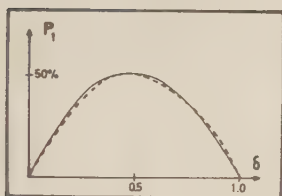


Fig. 38: (²⁵, Abb. 11): wie Fig. 37, jedoch mit zentraler Stopblende im Magneten, die die Detektorfläche genau abdeckt. Gestrichelt: Berechnung von $\Phi(z = 600 \text{ mm})$ mit $a = 62 \text{ mm}$; übrige Parameter wie in Fig. 37.

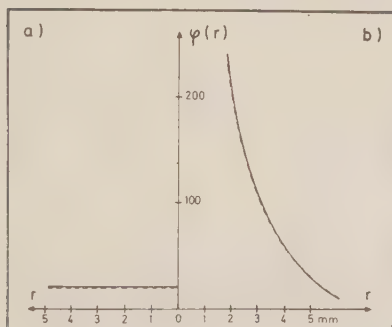


Fig. 39: (²⁵, Abb. 7): Strahlprofil a) für die defokussierte Komponente, b) für die fokussierte Komponente und Vergleich mit Rechnungen. Gestrichelt: Berechnung von $\Psi(r, z = 475 \text{ mm})$ mit $a = 475 \text{ mm}$, $R_0 = 4 \text{ mm}$; übrige Parameter wie in Fig. 37.

als gestrichelte Kurve die Berechnung nach der Methode der Integration im PR eingetragen. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

Es wäre durchaus möglich, im Rahmen der Methode nach Becker und Fischer die Beschränkung auf den Spezialfall einer "Dünnen Linse" fallenzulassen. Dazu müßte man Hauptebenenabstände einführen und stattd der genäherten Brennweite $f \approx s^2/l_0$ den exakten Ausdruck $f = s/\sin(l_0/s)$ verwenden.

Diesen Weg, jedoch in Verbindung mit Raumwinkelbetrachtungen, schlägt Livshits²⁷ ein. Er berechnet - wieder im Spezialfall einer punktförmigen Strahlquelle, $r_0 \ll R_0$ - die Flußdichte $\Psi(r,z)$ hinter dem Magneten. Der Autor gibt den im interessierenden Punkt (r,z) durch das Bild der Quellenöffnung begrenzten Raumwinkel an (dieser stimmt genau mit der kreisförmigen Begrenzung in der (x',y') -Ebene Gl. (39) überein) sowie den vom Magneten akzeptierten Raumwinkel am Ort der Strahlquelle. Diese letztere Bedingung der Form

$$(83) \quad y_0'^2 \leq R_0^2/(a^2 + s^2)$$

steht an Stelle der Akzeptanzbedingung Gl. (28). Man sieht in der Darstellung im 2-dimensionalen PR (y,y') in Fig. 40, daß sie im Fall einer punktförmigen Quelle ($r_0 \rightarrow 0$) die Akzeptanzbedingung annähert.

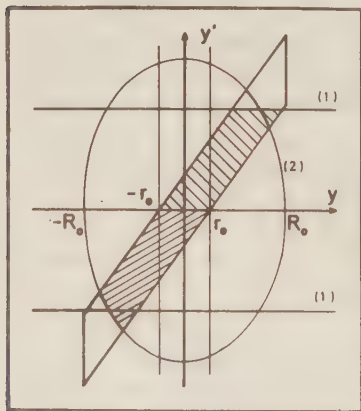


Fig. 40: Vergleich des von der Akzeptanzbedingung zugelassenen Phasenraums ((2), schraffiert in der unteren Hälfte) und des nach Gl. (83) besetzten Phasenraums ((1), schraffiert in der oberen Hälfte).

Eine weitere Näherung besteht darin, daß der Autor nur die Beiträge derjenigen Geschwindigkeiten aufsummiert, die zu reellen Bildern der Strahlquellenöffnung hinter dem Magneten führen. Dieser Verzicht auf alle Geschwindigkeiten, die virtuelle Bilder liefern, dürfte vor allem für die Abweichungen am Rande des von Livshits berechneten Profils (²⁷, Abb. 3) in Fig. 41 verantwortlich sein, während die Abweichungen im zentralen Teil wohl auf der Näherung einer punktförmigen Quelle beruhen.

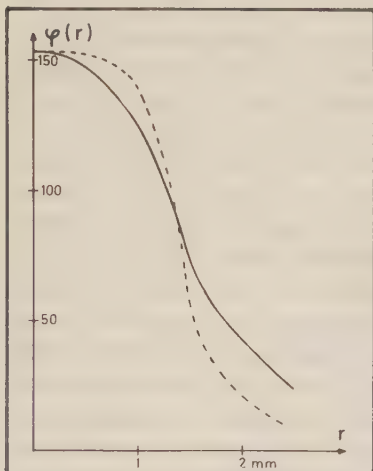


Fig. 41: (²⁷, Abb. 3): Strahlprofil $\psi(r)$ und Vergleich mit Rechnungen nach der Phasenraum-methode. Gestrichelt: Berechnung von $\psi(r, z = 270 \text{ mm})$ mit $r_0 = 0,4 \text{ mm}$, $a = 40 \text{ mm}$, $R = 1,9 \text{ mm}$, $l_0 = 100 \text{ mm}$, $\alpha_0 = 0,82$.

Die von Livshits benutzte Methode ist der Berechnung der Intensitätsverteilung aus Betrachtungen des PR sehr ähnlich und zeigt besonders deutlich den Zusammenhang mit Raumwinkelbetrachtungen. Doch scheinen die dort verwendeten Näherungen keinen Vergleich der Ergebnisse mit Ergebnissen dieser Arbeit zuzulassen.

Insbesondere ist auch die Behauptung angreifbar, schon für einen monochromatischen Strahl sei die Flußdichte am Bildort unabhängig von der Gegenstandsweite und der Brennweite. Sie gilt nämlich nur einzeln für eine der beiden Größen, falls die andere so nachgeregelt wird, daß das Bild wieder am selben Ort entsteht, Fig. 42. Zwar wird im Falle b) ein größerer Raumwinkel akzeptiert, der Fluß in diesem Raumwinkel verteilt sich aber auf eine größere Bildfläche.

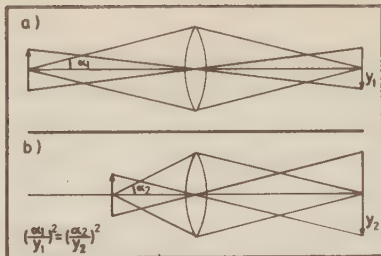


Fig. 42: Zur Unabhängigkeit der Flußdichte in der Bildebene von der Gegenstandsweite oder der Brennweite.

Ähnlich dürfte die Behauptung des Autors, auch für einen Teilchenstrahl mit breiter Geschwindigkeitsverteilung sei die Flußdichte unabhängig vom Abstand a der Strahlquelle vom Magneten und von der Feldstärke H_0 , anzuzweifeln sein. Sie steht auch in krassem Widerspruch zu Ergebnissen über die Abhängigkeit von den Parametern a und α_0 , die im Abschnitt 4.1 diskutiert worden ist (vergl. Fig. 17 und 20).

5.6 Eigene Messungen an einer Quelle polarisierter Wasserstoffionen mit einem Zinkoxid-Kristall

Zum Vergleich mit nach der Phasenraummethode berechneten Ergebnissen wurden Messungen an der Quelle polarisierter Wasserstoffionen des Erlanger Tandem-Beschleunigers durchgeführt. Dabei wurde ein ZnO-Kristall als Wasserstoffatom-Detektor verwendet, der von Heiland²⁸ untersucht worden war und erstmals von Haberrecker²⁹ in einer Atomstrahlapparatur eingesetzt wurde. Der Halbleiterkristall reagiert auf H-Atom-Adsorption mit einer Erhöhung seiner elektrischen Leitfähigkeit, die von an der Oberfläche gebildeten Donatoren herührt. Die theoretische Beschreibung ist in einer Arbeit von Haberrecker, Mollwo, Schreiber et al.²⁶ enthalten. Danach ergibt sich bei Freigabe des Atomstrahls zur Zeit $t = 0$ an einem vorher durch Erhitzen regenerierten Kristall ein Leitfähigkeitsanstieg mit exponentiellem Zeitverhalten:

$$(84) \quad \sigma_{\text{Oberfl.}}(t) = a \cdot \Phi (1 + b \cdot \Phi) \cdot (1 - \exp(-t/\tau \cdot (1 + b \cdot \Phi))).$$

Dabei ist Φ der Fluß auf die Kristalloberfläche, τ eine charakteristische Abdampfzeitkonstante, a und b sind Konstanten des Kristalls.

Von diesem Zusammenhang wird bei der im folgenden Abschnitt beschriebenen Methode der Leitfähigkeitsanstieg zur Zeit $t = 0$ ausgenutzt.

Darüber hinaus wurde versucht, auch den Sättigungswert als Maß für den auf den Kristall treffenden Fluß zu verwenden.

5.6.1 Impulsbetrieb

In der genannten Arbeit²⁶ wird beschrieben, wie der Anstieg der Leitfähigkeit zur Zeit $t = 0$

$$(85) \quad d\sigma(t=0)/dt = a \cdot \Phi,$$

der dem Fluß Φ auf den Detektor proportional ist, durch elektronische Differentiation des Zeitverhaltens Gl. (84) erhalten und als Maß für diesen Fluß aufgezeichnet wird. Danach wird der Kristall durch Erhitzen regeneriert und steht nach 18 Sekunden für eine neue Messung bereit. Das dazu gebaute Meßgerät³⁰ enthält ein Differenzierglied mit der Zeitkonstanten $\tau_d = 330$ ms. Deshalb werden Anstiege, die wesentlich schneller verlaufen (große Intensitäten), nur gemittelt wiedergegeben und daher zu gering angezeigt. Der ZnO-Kristall als H-Atom-Detektor bedarf in Verbindung mit der elektronischen Auswertung also einer Eichung; Eichkurven für verschiedene Kristalle wurden von Hoinkes³¹ aufgenommen.

Die theoretische Form einer Eichkurve nach dem Differenzierglied läßt sich aus Gl. (84) ableiten. Der Kristall liegt in Reihe mit einem Widerstand R_1 an einer Spannung U_0 ; die ohne Atomstrahl an ihm abfallende Spannung wird kompensiert (vergl. Fig. 44). Für das Signal $\Delta U(t)$ erhält man (falls $R_1 \ll R_k$)

$$(86) \quad \Delta U(t) = \text{const.} \cdot b \cdot \Phi \cdot \tau_k \cdot (1 - \exp(-t/\tau_k))$$

mit $\tau_k = \tau / (1 + b \cdot \Phi \cdot \tau)$. Nach einem Differenzierglied (Zeitkonstante τ_d) ergibt sich

$$(87) \quad U_{\text{diff}}(t) = \text{const.} \cdot b \cdot \Phi \cdot \tau_k \cdot \tau_d / (\tau_k - \tau_d) \cdot (\exp(-t/\tau_k) - \exp(-t/\tau_d)).$$

Dieser Ausdruck nimmt zur Zeit $t_m = \tau_k \cdot \tau_d / (\tau_k - \tau_d) \cdot \ln \tau_k / \tau_d$ sein Maximum an:

$$\begin{aligned}
 (88) \quad A &= U_{\text{diff}}(t_m) = \text{const.} \cdot b \cdot \Phi \cdot \tau_k \cdot (\tau_d / \tau_k)^{\frac{1}{1 - \tau_d / \tau_k}} \\
 &= \text{const.} \cdot b \cdot \Phi \cdot \tau / (1 + b \cdot \Phi \cdot \tau) \cdot \frac{1}{1 - \tau_d / \tau \cdot (1 + b \cdot \Phi \cdot \tau)} \\
 &\quad \cdot (\tau_d / \tau \cdot (1 + b \cdot \Phi \cdot \tau))
 \end{aligned}$$

Dieses Maximum wird ausgewertet, die Gleichung stellt also den Zusammenhang des Ausschlags A am Meßgerät mit dem Fluß Φ auf den Detektor, also die gesuchte Eichkurve $A = A(\Phi)$ dar, Fig. 43.

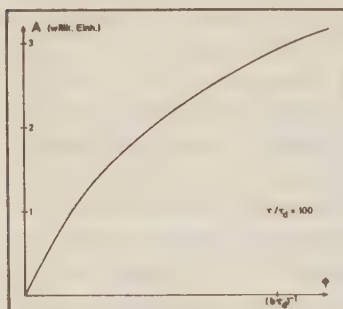


Fig. 43: Theoretische Eichkurve $A = A(\Phi)$ für einen ZnO-Kristall als H-Atom-Detektor bei Impulsbetrieb.

Tatsächlich wird jedoch zur Stabilisierung der Meßanordnung gegen Rauscheffekte noch ein Integrierglied nachgeschaltet; nach diesem läßt sich eine Eichkurve nicht mehr analytisch angeben.

Die Intensität der Tandem-Quelle polarisierter Wasserstoffionen ist nun wesentlich größer als die der Apparatur, in der die Eichung durchgeführt worden war; man befindet sich also bei Messungen weit im Sättigungsbereich der Eichkurve, wo Intensitätsunterschiede nur schwer meßbar sind. Ein Versuch, ein Differenzierglied mit wesentlich kleinerer Zeitkonstante zu verwenden und das Integrierglied wegzulassen, um dadurch die Eichkurve zu linearisieren, schlug fehl wegen völlig ungenügender Stabilität gegen Störeffekte (z. B. flatternde Relaiskontakte). Deshalb wurden die im Abschnitt 5.6.3 berichteten Messungen bei stark herabgesetzter

Intensität der Strahlquelle (geringerer Druck in der Entladungsröhre, geringere Senderleistung) durchgeführt. Diese Maßnahme war auch wünschenswert, um vor Einflüssen einer eventuellen Wolke vor der Strahlquellenöffnung sicher zu sein (vergl. Abschnitt 3.6.1).

5.6.2 Kontinuierliche Messungen

Der Fluß Φ geht in Gl. (84) zweimal ein: einmal im Exponenten, drückt sich also im Zeitverhalten aus; zum anderen im Sättigungsendwert

$$(89) \quad \tau_{\text{Oberfläche}}(\infty) = a \cdot \Phi \cdot \tau / (1 + b \cdot \Phi \cdot \tau).$$

Dieser hat bei großen Werten von $\Phi \cdot \tau$ für verschiedenen Fluß Φ nahezu denselben Wert a/b , bei niedrigen Werten von $\Phi \cdot \tau$ dagegen ist er dem Fluß Φ proportional. Die Idee der kontinuierlichen Messungen war nun, Proportionalität mit Φ selbst bei hohem Fluß dadurch zu erreichen, daß der Faktor τ klein gemacht wird. Dies läßt sich durch ständiges Heizen des Kristalls erreichen. Fig. 44 zeigt die Meßanordnung. Der Kristall liegt in Reihe mit einem Widerstand $R_1 = R_k$ an einer konstanten Spannung U_0 . Mit dieser Anordnung hält man die im Kristall umgesetzte Leistung selbst bei geringer Änderung des Kristallwiderstandes R_k nahezu konstant; diese Leistung ist ein Maß für die Temperatur des Kristalls und damit die Abdampfwahrscheinlichkeit. Die am Kristall ohne Atomstrahl abfallende Spannung wird wieder kompensiert, so daß man als Signal nur Spannungsänderungen ΔU erhält.

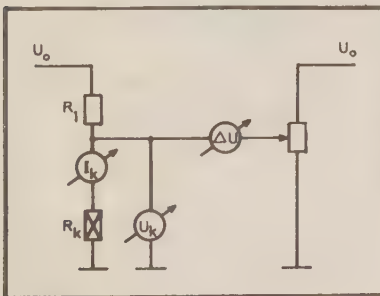


Fig. 44: Prinzipschaltbild bei kontinuierlichen Messungen mit einem ZnO-Kristall.

Zunächst wurde die für eine genügend kurze Einstellzeit des Sättigungswertes notwendige Heizleistung experimentell ermittelt; dabei sollte der Ausschlag beim Abschalten des Atomstrahls wieder vollständig zurückgehen. Fig. 45 zeigt Anstieg und Abfall des Signals für einige Heizleistungen N_k .

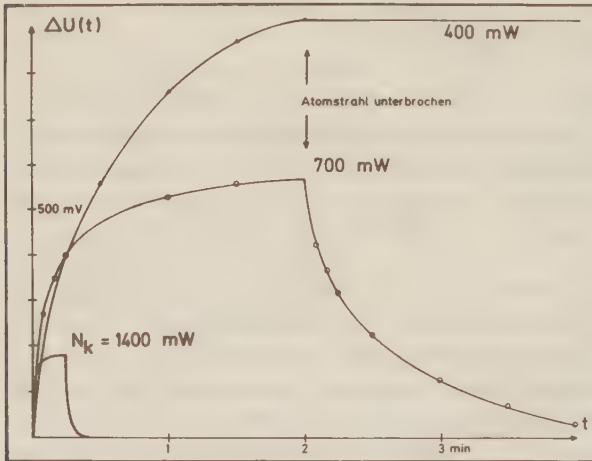


Fig. 45: Zeitabhängigkeit des Signals $\Delta U(t)$ nach dem Ein- und Ausschalten des Atomstrahls für verschiedene im Kristall umgesetzte Leistungen N_k .

Mit der niedrigsten Heizleistung, die gut ablesbare Sättigungswerte ergab, wurde dann nach dem von Hoinkes³¹ beschriebenen Verfahren eine Eichkurve aufgenommen, Fig. 46, die tatsächlich der Form Gl. (89) gehorcht:

$$(90) \quad \Delta U(\infty) = c \cdot \Phi / (1 + d \cdot \Phi)$$

wobei $c = a \cdot \tau$ und $d = b \cdot \tau$ Konstanten sind. Diese Übereinstimmung kann als Stütze für die Theorie Gl. (84)²⁶ angesehen werden.

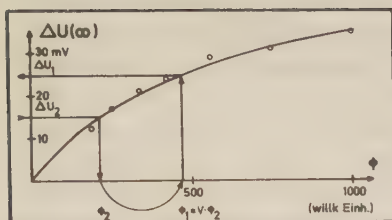


Fig. 46: Gemessene Eichkurve $\Delta U(\alpha) = f(\Phi)$ und schematische Verknüpfung der Signale ΔU_1 , ΔU_2 für zwei Intensitäten mit festem Intensitätsverhältnis.

Weiterhin wurde der Verlauf der Anzeige eines festen Intensitätsverhältnisses $V = \Phi_1 / \Phi_2$ für verschiedene Intensitäten gemessen; ein solches festes Verhältnis steht mit Messungen mit Sechspolmagnet eingeschaltet zu ausgeschaltet zur Verfügung. Unter Zugrundelegung von Gl. (90) erhält man

$$(91) \quad V^* = \Delta U_1 / \Delta U_2 = V / (1 + d/c \cdot (V - 1) \cdot \Delta U_2)$$

in Abhängigkeit von der Anzeige der kleineren Intensität.

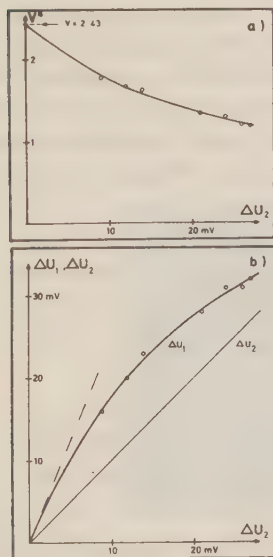


Fig. 47: a) Anzeigeverhältnis $V^* = \Delta U_1 / \Delta U_2$ bei verschiedenen Intensitäten;

b) Verknüpfung der Signale ΔU_1 und ΔU_2 .

Die Meßpunkte in Fig. 47 a) liegen im gemessenen Bereich auf einer solchen Kurve. Der Zusammenhang wird noch klarer, wenn man $\Delta U_1 = f(\Delta U_2)$ aufträgt, wenn man also den in Fig. 46 mit Pfeilen bezeichneten Weg durchläuft. Hier erwartet man theoretisch

$$(92) \quad \Delta U_1 = V^* \cdot \Delta U_2 = V \cdot \Delta U_2 / (1 + d/c \cdot (V - 1) \cdot \Delta U_2).$$

Die Meßpunkte in Fig. 47 b) folgen einer solchen Kurve. Man sieht in beiden Darstellungen, daß nur bei geringen Intensitäten das wahre Intensitätsverhältnis angezeigt wird, das sich für größere Intensitäten immer mehr zu 1 nivelliert. Auch der Nachweis dieses Zusammenhanges läßt sich als Stütze der theoretischen Formel Gl. (84) auffassen.

Messungen der Intensitätsverteilung, insbesondere von Strahlprofilen, wie sie zum Vergleich mit Berechnungen nach der Phasenraummethode wünschenswert gewesen wären, waren leider nicht möglich. Zunächst sieht man in Fig. 46, daß man sich bei der eingestellten Heizleistung doch schon im Sättigungsbereich der Eichkurve befindet. Um in den linearen Teil zu kommen, müßte man entweder niedrigere Intensitäten verwenden (dann würden die ohnehin kleinen Signale von etwa 30 mV - bei einer am Kristall liegenden kompensierten Spannung von etwa 20 V - noch kleiner), oder man müßte die Zeitkonstante τ durch Erhöhung der Temperatur weiter herabsetzen (auch dann würden die Signale kleiner). Diesem letzteren Weg setzte aber die Zerstörung der Kristallkontakte (die mit "epoxy silver solder" leitend an die Halterung gekittet sind) oder der Kristalloberfläche (durch Zersetzungsprodukte der Kitte) eine obere Grenze. So wurde z. B. der Kristall, mit dem die obigen Messungen Fig. 45 durchgeführt worden waren, bei einer in ihm umgesetzten Leistung von 2,5 W zerstört, andere Kristalle schon bei geringeren Leistungen.

Als noch schwerer wiegende Schwierigkeit hat sich aber die völlig ungenügende Langzeitkonstanz erwiesen. Nach Freigabe des Atomstrahls konnte man zwar die obigen Messungen innerhalb von jeweils einigen Sekunden durchführen, über eine

halbe Stunde jedoch lief der durch Kompensation eingestellte Nullpunkt um etwa eine Größenordnung mehr, als der Effekt selbst ausmachte. Die Erklärung kann in der langsamen Aufheizung des Kristalls durch Rekombination von H-Atomen gesucht werden. Diese Inkonstanz machte den Einsatz kontinuierlicher Messungen zum Ausmessen von Strahlprofilen unmöglich

5.6.3 Vergleich der Meßergebnisse mit Rechnungen

Nach der Impulsmethode wurden Messungen durchgeführt, die mit der Methode der Phasenraumintegration nachgerechnet und verglichen wurden. Von den sieben Variablen und Parametern r , z sowie r_0 , a , R_0 , l_0 und α_0 waren nur drei für einfache Variation zugänglich: r , z und α_0 . Die Variation von α_0 geschah über den den Sechspolmagneten erregenden Strom. Zur Variation von r und z wurde ein zweidimensionaler Präzisionsvorschub für den Kristall gebaut, Fig. 48. Auf einem seitlichen Flansch der Tandem-Quelle wurde ein Flansch mit einem Federbalg mit durchgeführter Achse angebracht. Am Ende des Federbalgs befindet sich ein Rahmen, der auf einem gleitenden Schlitten die Detektorfassung trägt. Durch Zug an der Achse wird der Federbalg zusammengedrückt; das bedeutet die Bewegung des Detektors in r -Richtung. Durch Drehen der Achse wird über Kegel- und Zahnräder eine Spindel gedreht, die den Schlitten in z -Richtung bewegt. Von außen läßt sich die Anordnung noch auf/ab bewegen; damit kann die Höhe der Strahlachse gefunden werden. Außerdem gestattet der Vorschub die Justierung der z -Achse in zwei Richtungen.

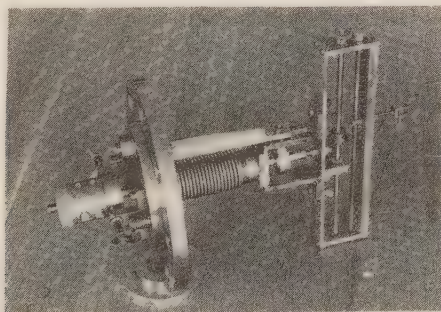


Fig. 48: Ansicht des Detektorvorschubs.

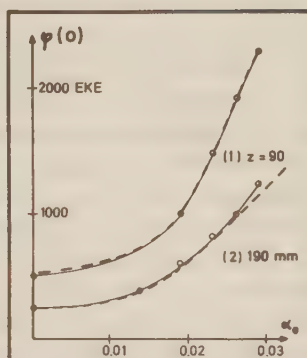
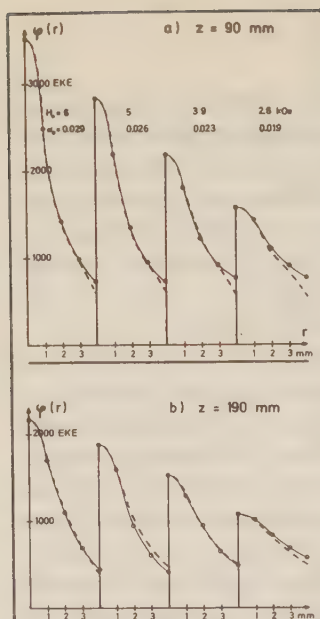


Fig. 49: Messung von Strahlprofilen $\psi(r)$ für verschiedene Magnetfelder H_0 und Vergleich mit Rechnungen (gestrichelt)
a) für $z = 90$ mm, b) für $z = 190$ mm;

c) Messung der Flußdichte $\psi(0)$ auf der Achse in Abhängigkeit vom Magnetfeld H_0 , gegeben durch den Parameter α_0 , und Vergleich mit Rechnungen für $z = 90$ mm (Kurve (1)) und $z = 190$ mm (Kurve (2)).

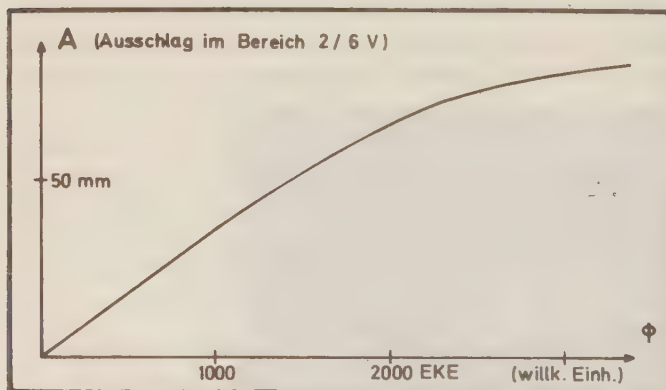


Fig. 50: Eichkurve $A = A(\Phi)$, gewonnen aus Fig. 49, Kurve (1).

Mit diesem Detektorvorschub wurden Strahlprofile $\Psi(r)$ ⁺⁾ an verschiedenen Stellen z aufgenommen, Fig. 15 a); außerdem wurde die z -Abhängigkeit für den Punkt auf der Achse extra gemessen, Fig. 15 b). Diese beiden Kurven lassen sich mit dem berechneten Feld $\Psi(r, z)$, Fig. 11, direkt vergleichen. In den Fig. sind die berechneten Kurven gestrichelt eingetragen, die Meßwerte wurden mit den durchgezogenen Kurven verbunden. Die Übereinstimmung ist sehr gut. An der Stelle $r = 4$ mm macht sich schon der Einfluß der im zwischen den Polschuhen schon wieder abfallenden Feld gesammelten defokussierten Komponente bemerkbar.

Bei Variation des Magnetstromes erhält man an zwei verschiedenen Stellen z die Profile Fig. 49 a) und b); außerdem wurde die Abhängigkeit vom Parameter α_0 für den Punkt auf der Achse noch extra gemessen, Fig. 49 c). Dabei wurde die Kurve (1) zur Gewinnung einer Eichkurve herangezogen, die Übereinstimmung mit der Rechnung ist also trivial. Alle anderen Kurven wurden mit dieser Eichkurve, Fig. 50, entfaltet, da für den verwendeten Kristall keine anders gemessene Eichkurve vorlag.

Insgesamt kann man gute Übereinstimmung der Rechnungen mit den Messungen feststellen. Zusammen mit dem Vergleich mit früheren Messungen und Rechnungen läßt sich sagen, daß die Methode der Phasenraumintegration die Intensitätsverteilung hinter einem Sechspolmagneten verläßlich zu berechnen gestattet.

5.6.4 Weitere Messungen

Der in die Atomstrahlapparatur eingebaute H-Atom-Detektor wurde anschließend noch zu weiteren Messungen eingesetzt, die alle bei so hoher Intensität der Strahlquelle vorgenommen wurden, daß sie den Bereich der oben erwähnten Eichkurve überschritten. Die Ergebnisse lassen sich also nur qualitativ

⁺⁾ Da die Dimensionen des Kristalls klein sind, ist die Flußdichte über den ganzen Detektor praktisch konstant, der Fluß auf den Detektor $\Phi = F_d \cdot \Psi$ also der Flußdichte proportional.

vergleichen; auf jeden Fall ist die in diesem Bereich unbekannte Eichkurve monoton steigend. In den folgenden Fig. ist daher nur der Ausschlag A des Meßgeräts, nicht der wahre Fluß auf den Detektor aufgetragen.

Fig. 51 zeigt die Abhängigkeit des Signals $A(0)$ für den Punkt auf der Achse an einer festen Stelle im zweiten Pump- raum vom Druck p_1 im ersten Pump- raum bei fester (niedriger) Senderleistung; der Druck p_1 ist ein Maß für den Druck p_0 in der Entladungsröhre, der Zusammenhang ist jedoch nicht linear¹⁴. Man erkennt ein Plateau etwa gleicher Intensität; der übliche Druck der Strahlquelle ist mit einem Pfeil ein- getragen.

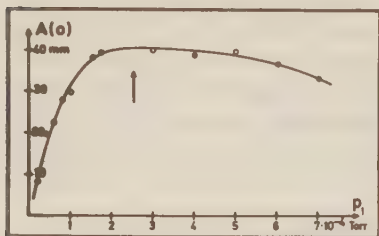


Fig. 51: Intensität auf der Achse, gemessen als Ausschlag $A(0)$, in Abhängigkeit vom Druck in der Strahlquelle, gemessen als damit zusammenhängender Druck p_1 im ersten Pump- raum.

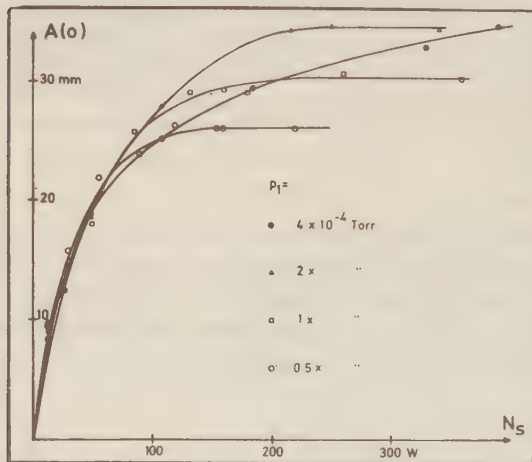


Fig. 52: Intensität auf der Achse, gemessen als $A(0)$, in Abhängigkeit von der Sender-Anodenverlustleistung N_s für verschiedene Drücke in der Strahlquelle.

In Fig. 52 ist die Abhängigkeit des Signals $A(0)$ von der Senderleistung N_s (Anodenverlustleistung der Endröhren, die bei optimaler Anpassung ein Maß für die in die Entladungsröhre eingekoppelte Leistung darstellt) für verschiedene Drücke p_1 aufgezeichnet. Man sieht, daß die Intensität für jeden Druck einen Sättigungswert annimmt, offenbar dann, wenn die eingekoppelte Leistung zur vollständigen Dissoziation aller H_2 -Moleküle ausreicht; eine Steigerung der Leistung bringt dann nichts mehr. Bei dem höchsten eingestellten Druck reicht jedoch die Leistung dazu nicht aus; hier wäre eine weitere Erhöhung wünschenswert. Dazu bietet sich die Verwendung eines Wendeltopfkreises^{21, 32} als die Entladung anregender Endkreis an, der eine wesentliche Steigerung der eingekoppelbaren Leistung und damit die Verwendung höherer Entladungsdrücke zuläßt.

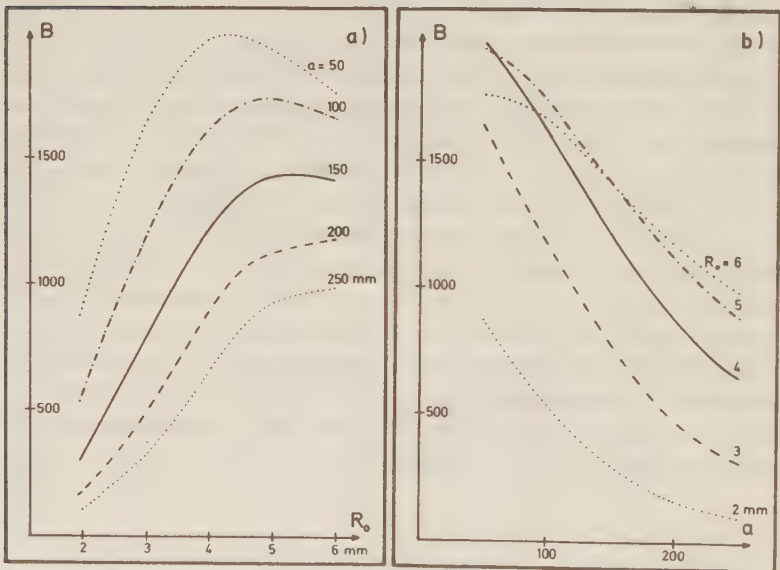
Dabei ist allerdings zu bedenken, daß mit steigendem Druck p_0 in der Entladungsröhre, der zu einem höheren Druck p_1 im ersten Pumpraum führt, auch der Druck p_2 im zweiten Pumpraum steigt. Ein Teil dieses Druckanstiegs ist auf Wasserstoffatome zurückzuführen, die dann als diffuser Untergrund zum obigen Signal $A(0)$ beitragen. Die Intensität im Strahl selbst steigt also schwächer, als es der Anstieg von $A(0)$ bzw. der zugehörigen Intensität erwarten läßt. Außerdem wird bei höherem Druck p_1 der Strahl durch Streuung am Restgas geschwächt; dies führt zu einer Verminderung der Intensität auf der Achse und insgesamt zu einer Verbreiterung der Profile. Um diesen unerwünschten Effekt zu vermeiden, müßte man bei Verwendung höherer Drücke p_0 den Leitwert der Entladungsröhrenöffnung verkleinern, ohne dabei den Strahl selbst zu vermindern. Das bedeutet, daß die Öffnung als längerer Kanal ausgebildet werden müßte (gegenwärtig ist $r_0 = 1,5$ mm, $l = 5$ mm, also $\gamma = 2r_0/l = 0,6$); dies würde die Richtwirkung verstärken und damit den Druck p_1 trotz Erhöhung von p_0 nicht steigen lassen.

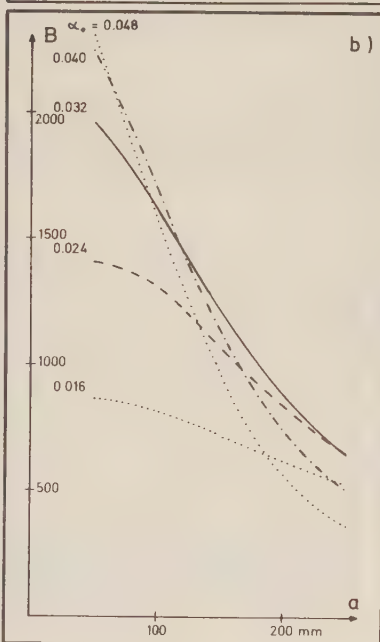
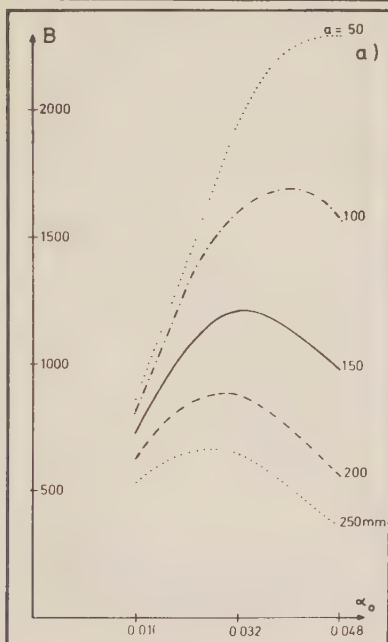
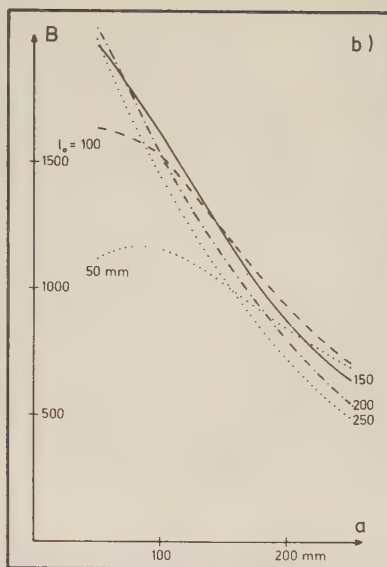
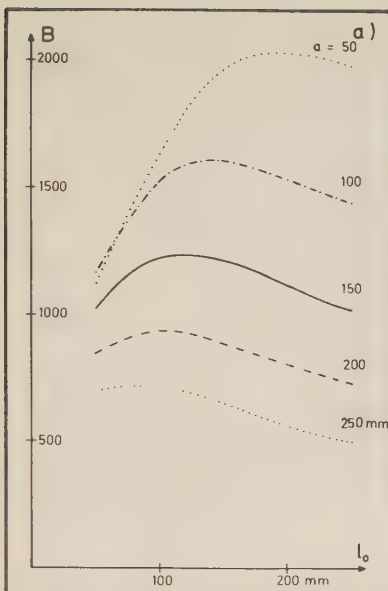
5.7 Parameterabhängigkeit der Besetzung

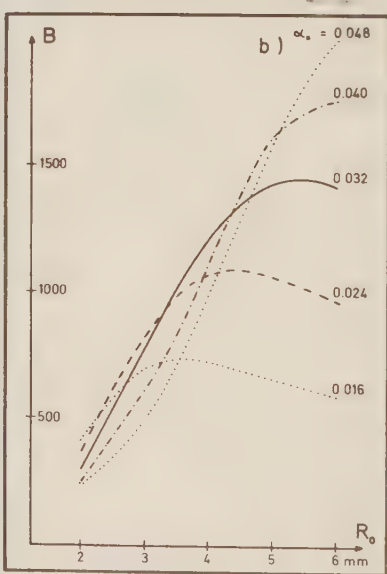
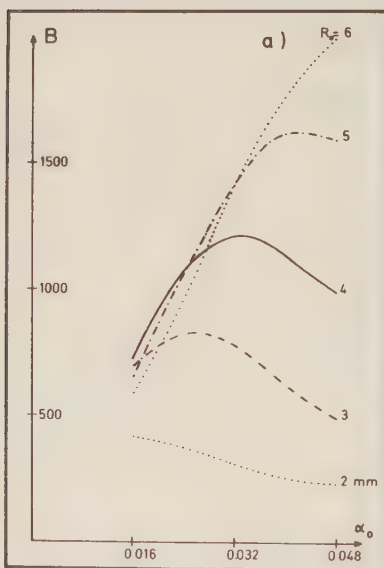
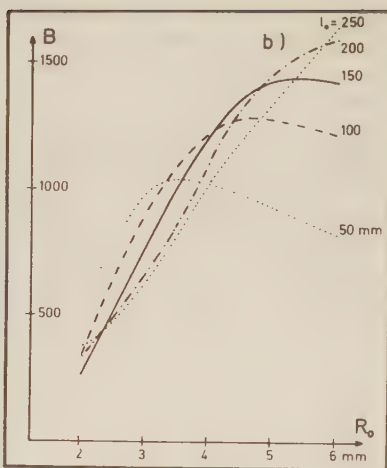
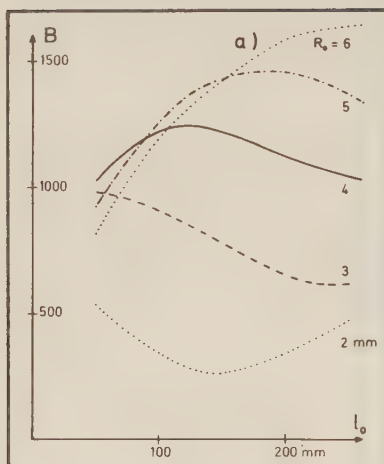
5.7.1 Kurvenschardarstellung in zwei Parametern für die Stelle $z = 350$ mm

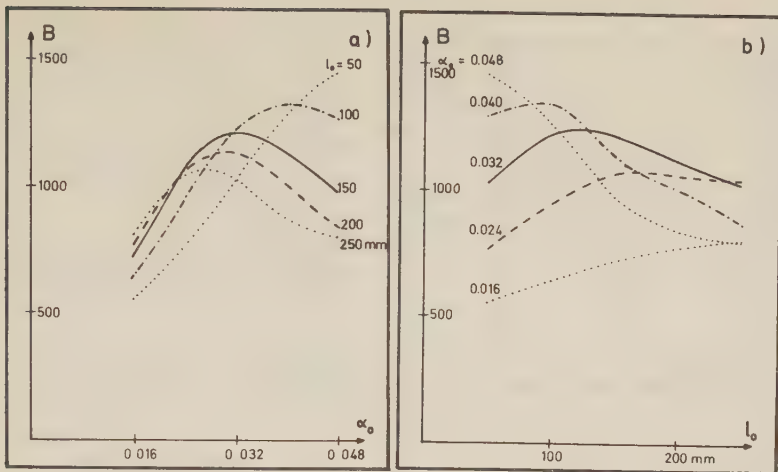
Als Ergänzung zu den in Fig. 22 bis 27 dargestellten Höhenliniendiagrammen in zwei Parametern für $B_g(350)$ werden hier noch für jedes Diagramm die Schnitte für konstante Werte des einen und des anderen Parameters gezeigt, an denen sich die diskutierten Faktoren, die man bei Änderung der Parameter gewinnt, leichter ablesen lassen, Fig. 53 bis 58.

Fig. 53 bis 58: Kurvenscharen von $B_g(350)$ in Abhängigkeit von je zwei Parametern.









5.7.2 Einzelabhängigkeiten und Höhenliniendiagramme in zwei Parametern für die Stelle $z = 150$ mm

Im Kapitel 4. war das Optimalisierungsverfahren nur für die Stelle $z = 350$ mm durchgeführt worden. Diese Entfernung ist deshalb so groß, weil in der Tandem-Quelle zwischen dem Sechspolmagneten und dem Ionisierer ein Hochfrequenzübergang eingebaut ist.

Im Zuge der Rechnungen wurden nun die Flußdichte- und die Dichteverteilung mit ihren Abhängigkeiten von den Parametern auch noch für die Stelle $z = 150$ mm berechnet; etwa diese Stelle wäre für eine Konzeption ohne Hochfrequenzübergang ein möglicher Ionisiererort. Die dabei gewonnenen Ergebnisse für $B_8(150)$ und $\Phi_8(150)$ sollen hier noch summarisch dargestellt werden. Fig. 59 bis 63 zeigen die den Fig. 16 bis 20 entsprechenden Einzelabhängigkeiten von den Parametern, Fig. 64 bis 69 die den Fig. 22 bis 27 entsprechenden Höhenliniendiagramme in $B_8(150)$ für gleichzeitige Variation von zwei Parametern. Auf eine Diskussion dieses gegenwärtig nicht interessierenden Falles wird verzichtet.

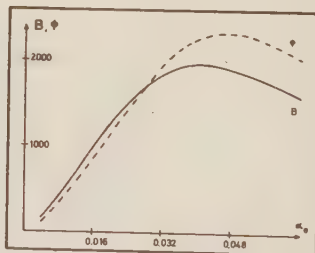
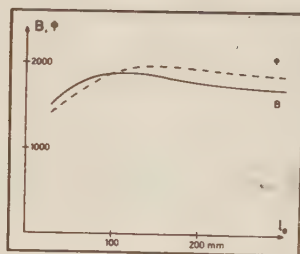
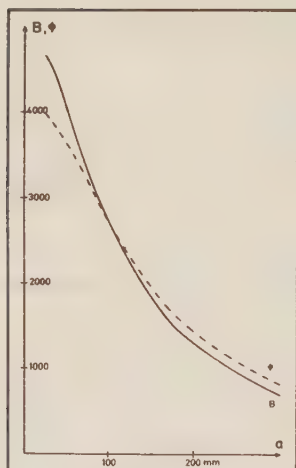
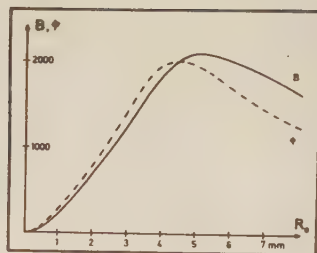
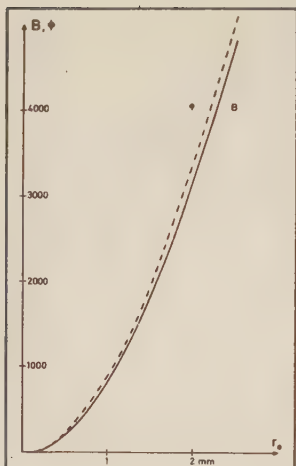


Fig. 59 bis 63: Besetzung α_{50} (durchgezogen) und Fluß Φ_{150} (gestrichelt) in Abhängigkeit von den Parametern $r_0, a, R_0, l_0, \alpha_0$.

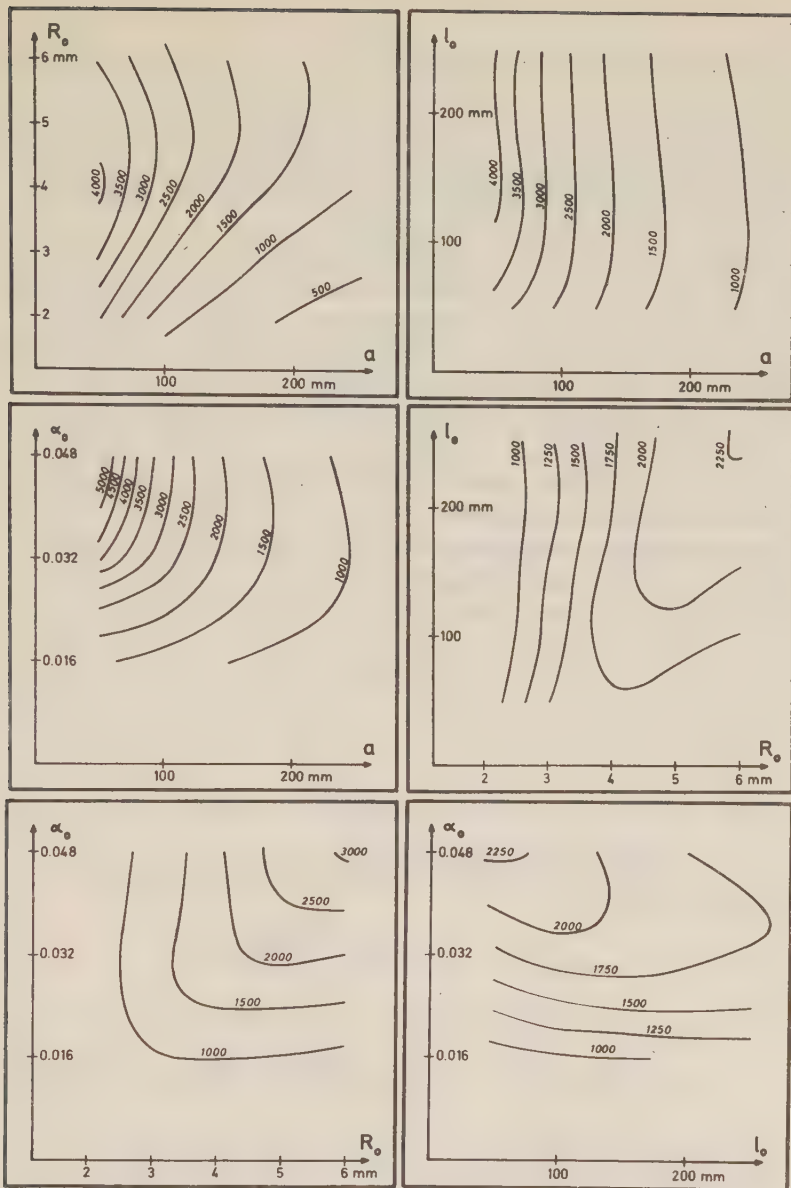


Fig. 64 bis 69: Höhenlinien von $B_8(150)$ in Abhängigkeit von je zwei Parametern.

5.8 Optimalisierungsbedingung

Die Forderung an einen Strahl polarisierter Ionen, der nach Beschleunigung für Kernexperimente verwendet werden soll, ist, daß bei gegebener Meßzeit der Fehler der zu messenden Analysierstärke A möglichst klein wird.

Bedeutet P die Strahlpolarisation senkrecht zur Reaktions-ebene, so wird durch in dieser Ebene liegende Zähler grundsätzlich das Produkt P.A gemessen. Zwei Meßverfahren sind möglich: entweder wird mit einem Zähler mit der Polarisationsrichtung + und - (parallel und antiparallel zur Streunormalen) gemessen, wobei in beiden Fällen die gleiche Ladung durch das Target geht: Zählraten N_+ , N_- ; oder mit zwei symmetrisch rechts und links angeordneten Zählern wird mit beibehaltener Polarisationsrichtung gemessen, wobei die Nachweiswahrscheinlichkeit der Zähler im unpolarisierten Fall gemessen werden muß: Zählraten N_R , N_L , N_R^0 , N_L^0 . Die gesuchte Asymmetrie $\epsilon = P.A$ ist im ersten Fall

$$(93) \quad \epsilon' = (N_+ - N_-)/(N_+ + N_-),$$

im zweiten Fall

$$(94) \quad \epsilon'' = (N_L/N_L^0 - N_R/N_R^0)/(N_L/N_L^0 + N_R/N_R^0)$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet sich der absolute Fehler $\Delta \epsilon$ zu

$$(95) \quad \Delta \epsilon' = 2 \cdot \sqrt{N_+ \cdot N_-} / (N_+ + N_-)^2 \cdot \sqrt{N_+ + N_-}$$

$$(96) \quad \Delta \epsilon'' = 2 \cdot \sqrt{N_L/N_L^0 \cdot N_R/N_R^0} / (N_L/N_L^0 + N_R/N_R^0)^2 \cdot \sqrt{N_L/N_L^0 \cdot (N_R/N_R^0 + N_L^0/N_R^0) + N_R/N_R^0 \cdot (N_L/N_L^0 + N_R^0/N_L^0)}$$

Nun ist im allgemeinen die Nachweiswahrscheinlichkeit der Zähler etwa gleich: $N_L^0/N_R^0 \approx 1$, außerdem geschieht die Messung im unpolarisierten Fall mit gleicher Genauigkeit wie die im polarisierten: $N_L^0 \approx N_R^0 \approx (N_R + N_L)/2$.

Damit wird auch

$$(97) \quad \varepsilon'' \approx (N_1 - N_R)/(N_1 + N_R),$$

$$(98) \quad \Delta\varepsilon'' \approx 2 \cdot \sqrt{N_1 \cdot N_R} / (N_1 + N_R)^2 \cdot \sqrt{N_1 + N_R + 4 \cdot N_1 \cdot N_R / (N_1 + N_R)}$$

Ersetzt man nun $N_+ = N_- \cdot (1 + \varepsilon') / (1 - \varepsilon')$, so geht Gl. (95) über in

$$(99) \quad \Delta\varepsilon' = 1/\sqrt{(N_+ + N_-)} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon'^2} = 1/\sqrt{(N_+ + N_-)} \cdot f_1(\varepsilon')$$

$$(100) \quad = 1/\sqrt{2N_+} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon'^2} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon'} = 1/\sqrt{2N_+} \cdot g_1(\varepsilon')$$

$$(101) \quad = 1/\sqrt{2N_-} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon'^2} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon'} = 1/\sqrt{2N_-} \cdot h_1(\varepsilon'),$$

je nachdem, ob man die Summe beider Zählraten oder eine Zählrate allein in dem Ausdruck beibehalten will. Die Korrekturfunktionen f_1 , g_1 und h_1 sind in Fig. 70 dargestellt. Für $\varepsilon' > 0$ ist N_+ die größere Zählrate, für $\varepsilon' < 0$ N_- ; deshalb ist $h_1(-\varepsilon') = g_1(\varepsilon')$. Man sieht, daß man im Bereich $|\varepsilon'| \leq 0,5$ f_1 und für jeweils die größere Zählrate auch g_1 bzw. h_1 als konstant ≈ 1 ansehen kann.

Ersetzt man ebenso $N_1 \approx N_R \cdot (1 + \varepsilon'') / (1 - \varepsilon'')$, so geht Gl. (98) über in

$$(102) \quad \Delta\varepsilon'' \approx 1/\sqrt{(N_1 + N_R)/2} \cdot \sqrt{(1 - \varepsilon''^2)(1 - \varepsilon''^2/2)}$$

$$= 1/\sqrt{(N_1 + N_R)/2} \cdot f_2(\varepsilon'')$$

$$(103) \quad \approx 1/\sqrt{N_1} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon''} \cdot f_2(\varepsilon'') = 1/\sqrt{N_1} \cdot g_2(\varepsilon'')$$

$$(104) \quad \approx 1/\sqrt{N_R} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon''} \cdot f_2(\varepsilon'') = 1/\sqrt{N_R} \cdot h_2(\varepsilon'').$$

Fig. 71 zeigt f_2 , g_2 und h_2 . Für $\varepsilon'' > 0$ ist N_1 die größere Zählrate, für $\varepsilon'' < 0$ N_R . Auch hier lassen sich die Korrekturfunktionen in einem weiten Bereich als konstant ≈ 1 ansehen.

Die Tatsache, daß man bei Messungen nach dem ersten Verfah-

ren nur einen Zähler hat, die Nachweiswahrscheinlichkeit also beide Male mit beliebiger Genauigkeit gleich ist, während sie im zweiten Fall mit einem Fehler behaftet gemessen wird, drückt sich z. B. darin aus, daß für $\epsilon' = \epsilon'' = 0$ der statistische Fehler im ersten Fall kleiner ist als im zweiten: $\Delta\epsilon' = 1/\sqrt{2} \cdot \Delta\epsilon''$; dafür kommen beim ersten Verfahren aber eventuell weitere Fehler ins Spiel, die nicht rein statistischer Natur sind (z. B. apparative Asymmetrien beim Umschalten der Polarisationsrichtung).

Aus den Gl. (99) bzw. (102) folgt nun die Optimalisierungsbedingung. Wenn die Strahlpolarisation P genau bekannt ist: $\Delta P = 0$, so folgt aus dem absoluten Fehler der Asymmetrie ϵ der Fehler der Meßgröße A :

$$(105) \quad \Delta\epsilon = \Delta(P \cdot A) = P \cdot \Delta A:$$

$$(106) \quad \approx 1/\sqrt{N_1 + N_2} \cdot \gamma,$$

wobei $\gamma = 1$ im ersten Fall, $\gamma = \sqrt{2}$ im zweiten Fall ist. Da bei gegebener Meßzeit die Summe der Zählraten dem Strahlstrom I proportional ist: $N_1 + N_2 \sim I$, so wird

$$(107) \quad \Delta A \sim 1/(P \cdot \sqrt{I})$$

klein, wenn $P \cdot \sqrt{I}$ oder auch $P^2 \cdot I$ groß wird. Das ist die gesuchte Optimalisierungsbedingung für einen Strahl polarisierter Ionen.

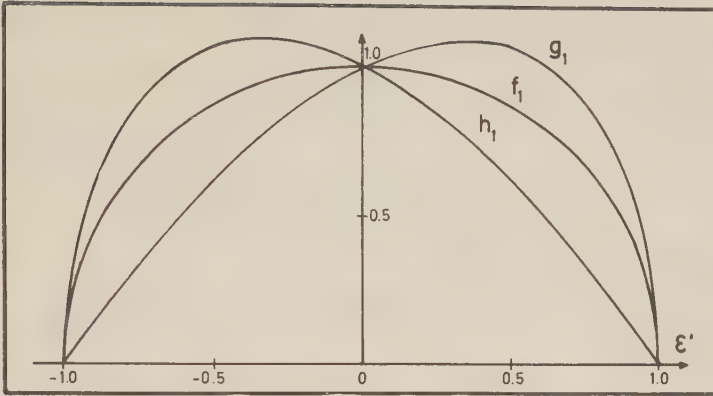


Fig. 70: Korrekturfunktionen f_1 , g_1 und h_1 in Abhängigkeit von der Asymmetrie ϵ' .

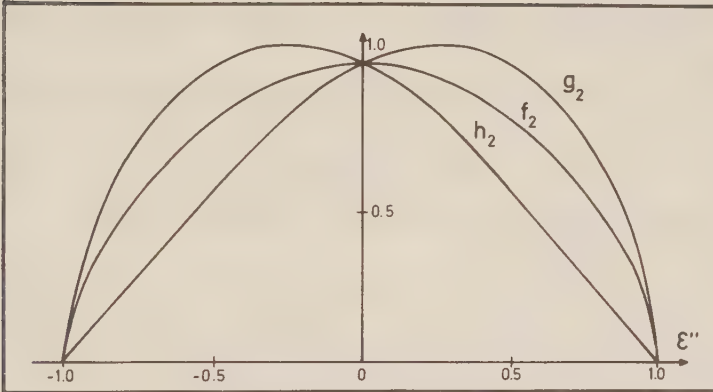


Fig. 71: Korrekturfunktionen f_2 , g_2 und h_2 in Abhängigkeit von der Asymmetrie ϵ'' .

5.9 Literaturverzeichnis

- ¹ H. Friedburg, Zeits. Phys. 130 (1951) 493
- ² G. H. Stafford, J. M. Dickson, D. C. Salter, M. K. Craddock, Nucl. Instr. 15 (1962) 146
- ³ P. S. Farago, Nucl. Instr. 30 (1964) 271
- ⁴ G. Clausnitzer, W. Dürr, G. Graw, E. Salzborn, H. Wilsch, J. Witte, Proc. 2nd Intern. Symp. on Polarization Phenomena of Nucleons, Birkhäuser Verlag Basel (1966) 79
- ⁵ H. Ebinghaus, U. Holm, H. V. Klapdor, H. Neuert, Zeits. Phys. 199 (1967) 68
- ⁶ R. L. Christensen, D. R. Hamilton, Rev. Sci. Instr. 30 (1959) 356
- ⁷ E. R. Collins, H. F. Glavish, S. Whineray, Nucl. Instr. 25 (1963) 67
- ⁸ W. Dürr, Diplomarbeit Erlangen (1965), unveröffentlicht
- ⁹ G. Clausnitzer, G. Graw, J. Witte, Proc. 2nd Intern. Symp. on Polarization Phenomena of Nucleons, Birkhäuser Verlag Basel (1966) 82
- ¹⁰ A. Lemonick, F. M. Pipkin, D. R. Hamilton, Rev. Sci. Instr. 26 (1955) 1112
- ¹¹ W. Merte, Handbuch der Physik XVIII, Springer Verlag Berlin (1927) 143
- ¹² I. Lindgren, Nucl. Instr. 3 (1958) 1
- ¹³ G. Clausnitzer, D. C. Hess, D. v. Ehrenstein, Phys. Letters 19 (1965) 114
- ¹⁴ E. Salzborn, Diplomarbeit Erlangen (1965), unveröffentlicht
- ¹⁵ K. F. Smith, zitiert von J. M. Dickson, Progress in Nucl. Tech. and Instr. 1, herausgegeben von F. J. M. Farley, North Holland Publishing Co. Amsterdam (1965) 103
- ¹⁶ L. Brown, zitiert von W. Haeberli, Ann. Rev. Nucl. Science 17 (1967) 373
- ¹⁷ K. G. Steffen, **High Energy Beam Optics**, Interscience Publishers (John Wiley and Sons) New York (1965)

- 18 A. P. Banford, The Transport of Charged Particle Beams, Spon Ltd. London (1966)
- 19 P. Zugenmaier, Zeits. Angew. Phys. 20 (1966) 184
- 20 P. M. Marcus, J. H. McFee, Recent Research in Molecular Beams, Academic Press New York and London (1959) 43
- 21 P. Lindner, Diplomarbeit Erlangen (1966), unveröffentlicht, zitiert in ²⁶
- 22 S. Penner, Rev. Sci. Instr. 32 (1961) 150
- 23 M. Kratzenstein, Zeits. Phys. 93 (1935) 279
- 24 B. Candoni, A. Luccio, N. Merzagora, C. Succi, Proc. 2nd Intern. Symp. on Polarization Phenomena of Nucleons, Birkhäuser Verlag Basel (1966) 91
- 25 G. Becker, B. Fischer, Zeits. Angew. Phys. 19 (1965) 537; 20 (1965) 71
- 26 K. Haberrecker, E. Mollwo, H. Schreiber, H. Hoinkes, H. Nahr, P. Lindner, H. Wilsch, Nucl. Instr. 57 (1967) 22
- 27 A. I. Livshits, Sov. Phys. - Tech. Phys. 12 (1967) 947
- 28 G. Heiland, Zeits. Phys. 148 (1957) 5
- 29 K. Haberrecker, Diplomarbeit Erlangen (1965), unveröffentlicht
- 30 H. Nahr, Diplomarbeit Erlangen (1966), unveröffentlicht
- 31 H. Hoinkes, Diplomarbeit Erlangen (1966), unveröffentlicht
- 32 R. Dierke, Funkschau (1961) 261

Ich danke Herrn Prof. Dr. R. Fleischmann für die Unterstützung dieser Arbeit und sein stetes Interesse an ihrem Fortgang.

Herrn Privatdozent Dr. G. Clausnitzer danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Anleitung in vielen fördernden Diskussionen. Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Polarisierete Teilchen verdanke ich wertvolle Ratschläge.

Ein Teil der numerischen Rechnungen wurde durchgeführt auf einer Rechenmaschine Siemens 2002 am Rechenzentrum der Siemens AG Erlangen und einer PDP-7 am Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung der Universität; beiden Stellen bin ich zu Dank verpflichtet.

LEBENS LAUF

Jürgen Witte

geb. am : 10. Mai 1938
in : Stargard/Pommern
Eltern : Dipl.-Ing. Helmut Witte und seine Ehefrau
Erna Witte, geb. Reche
Familienstand : verheiratet mit Edith Witte, geb. Pückert
(seit 26. November 1965);
ein Kind Andreas (geb. am 18. Februar 1967)
Schulen : 1945 bis 1950 Volksschulen in Stargard/Pom-
mern, Altenholz (Kreis Eckernförde) und
Kiel-Holtenau
1950 bis 1957 Oberschulen Hebbelschule Kiel,
Goethe-Schule Flensburg, Ohm-Oberrealschule
Erlangen
18. Juli 1957 Reifeprüfung
Studium : 1958 bis 1964 Studium der Physik an der
Universität Erlangen (Sommersemester 1962
an der Universität München)
Prüfungen : 4. Mai 1961 Diplom-Vorprüfung für Physiker
6. Mai 1964 Diplom-Hauptprüfung für Physiker
Stellungen : 1964 bis 1965 wissenschaftliche Hilfskraft
1965 bis 1968 Verwalter der Dienstgeschäfte
eines wissenschaftlichen Assistenten am
Physikalischen Institut der Universität
Erlangen-Nürnberg

